Lehrbuch
der
Mathematik,
für
Gymnasien und Lyzeen

von

Franz Ammon,
königl. Lyzeal-Professor in Augsburg.

BIBLIOTHECA BAMBERGENSIS

Erster Band.
Die reine Elementar-Arithmetik.

Augsburg, 1829.
Verlag der Kranzfelder'schen Buchhandlung.

Vorrede.

Ueberzeugt von der Nothwendigkeit eines Lehrbuches bei Vorträgen über die Mathematik, wünschte ich, meinen Vorträgen ein vaterländisches Lehrbuch zu Grunde zu legen. Allein unter den vorhandenen Lehrbüchern dieser Art sind die einen (z. B. die übrigens vortrefflichen Werke der Herren Magold, Weigl, Köberlein, Bundschuh) zu ausführlich, oder zu bändereich, und daher zu theuer, als daß ich sie an einer Studienanstalt einführen könnte, die unter ihren Zöglingen viele Unbemittelte zählt; die anderen (z. B. die Lehrbücher der Herren Siber und Mayer) sind zu mager, als daß sie für einen drey- bis vierjährigen Lehrcursus hinreichten. Die Arithmetik des letzteren insbesondere ist nur ein Verzeichniß der Titeln arithmetischer Sätze ohne Beweise.

Nachdem ich einige Zeit Bedenken getragen hatte, zu den vorhandenen mathematischen Lehrbüchern, deren Anzahl bereits Legion heißt, ein neues hinzuzufügen, so entschloß ich mich doch zuletzt in der Absicht,

1) des lästigen, zeitraubenden Diktirens in die Feder überhoben zu seyn, und

2) den Schülern der hiesigen Anstalt ein möglichst **wohlfeiles** Lehrbuch in die Hände zu geben,

3) welches nur das für Schulen Passende und Brauchbare enthalten sollte,

4) die handschriftlichen Hefte, die ich mit Benutzung der Werke der Herrn Magold, von Salis, Weigl, und besonders der Herrn Köberlein und Knarr für meine Vorträge zusammengetragen hatte, dem Drucke zu übergeben.

Mit Rücksicht auf diese 4 Punkte muß demnach diese Arbeit beurtheilt werden.

*) Da ich durch ein Versehen einige Druckbogen nicht zur Revision erhielt, so müssen vor dem Gebrauche des Buches die eingeschlichenen Fehler nach dem beigefügten Verzeichnisse derselben verbessert werden.

Inhaltsverzeichniß.

Erste Abtheilung.

Erstes Hauptstück. Von ganzen und gebrochenen Zahlen.

Zweites Hauptstück. Von den Würden und Wurzeln.

Zweite Abtheilung.

Von den Gleichungen.

Dritte Abtheilung.

Von den Verhältnissen, Proportionen, Progressionen und Logarithmen.

Anhang. Von den Maaßen, Gewichten und Münzen.

Sammlung einiger Aufgaben zur Lehre von den Gleichungen.

Einleitung.

Begriff, Gegenstand, Theile und Methode der Mathematik.

Begriff der Mathematik.

§. 1.

Die Mathematik ist die Wissenschaft von den Eigenschaften der Größen, welche diesen in Bezug auf ihre Quantität zukommen.

Weitere Erörterung des Begriffes der Mathematik:

1) Das Wort Mathematik stammt von dem griechischen Worte μάθημα, μάθησις, scientia, her; die Mathematik hieß also den Griechen die Wissenschaft vorzugsweise.

2) Wissenschaft nennt man den Inbegriff gleichartiger, apodiktisch gewisser und gehörig geordneter Erkenntnisse.

Erkenntnisse heißen gleichartig, welche von einem bestimmten Gegenstande (Objekt der Wissenschaft), in bestimmter Beziehung handeln.

Erkenntnisse sind apodiktisch gewiß, wenn ihre Wahrheit von Jedermann, der ihre Gründe einzusehen im Stande ist, anerkannt werden muß, wenn man nicht in die Verrichtungen seines Verstandes einen Widerspruch legen will. (Logische Gewißheit.)

Haben die Erkenntnisse keine apodiktische Gewißheit bei sich, so haben wir von ihnen kein eigentliches Wissen, sondern nur ein Fürwahrhalten.

In einer Wissenschaft müssen die Erkenntnisse so geordnet werden, daß sie nicht blos *aufeinander*, sondern *auseinander* folgen, d. h. daß die vorhergehende der Grund der folgenden Erkenntniß ist. Diese Anordnung der Erkenntnisse, wodurch ihre apodiktische Gewißheit erst hervortreten und sichtbar werden kann, heißt das *System* der Wissenschaft.

3) Man nennt eine *Größe*, was aus mehreren gleichartigen Dingen bestehend gedacht werden kann; die Menge der gleichartigen Dinge in derselben bezeichnet ihre *Quantität*.

4) Jedes der gleichartigen Dinge, aus welchen eine Größe bestehend gedacht wird, heißt die *Einheit*, oder das *Maß* derselben, und die Bestimmung der Quantität einer Größe, in Bezug auf eine gewisse Einheit, heißt das *Messen* der Größe.

5) Dinge heißen *gleichartig*, wenn man sie nur in Rücksicht auf solche Merkmale vergleicht, die ihnen gemeinschaftlich sind; sonst *ungleichartig*.

Die nämlichen Dinge können in Beziehung auf einige Merkmale gleichartig, in Beziehung auf andere ungleichartig seyn; z. B. ein bayerischer und ein würtemberger Sechser sind als Sechskreuzerstücke gleichartige Dinge; in wie ferne aber der eine Sechser ein bayerisches und der andere ein würtemberger Geldstück ist, sind sie ungleichartig.

6) Eine Größe kann nur dann durch ein gegebenes Ding gemessen werden, wenn sie aus Theilen bestehend gedacht werden kann, welche diesem Dinge gleichartig sind.

Ein Ding, welches als Maß einer Größe dient, kann oft selbst wieder aus mehreren gleichartigen Dingen bestehend gedacht, und daher durch eine andere Einheit gemessen werden.

7) Um eine Größe vollständig anzugeben, muß man nicht nur bestimmen, aus was für gleichartigen Dingen sie bestehend gedacht werde, sondern es muß auch die Menge derselben, d. h. die Zahl, welche die Quantität der Größe ausdrückt, angegeben werden.

8) Größen von einerlei Quantität heißt man gleich; von einerlei Qualität (Form oder Gestalt) ähnlich; Größen, welche einerlei Quantität und Qualität haben, heißt man congruent.

9) Eine Größe heißt stätig, fließend, continuirlich, wenn ihre gleichartigen Theile so verbunden sind, daß das Ende eines jeden einzelnen zugleich der Anfang des nächstfolgenden Theiles ist, (Raum und Zeit); sonst diskret.

§. 2.

Die Mathematik heißt

1) rein, wenn sie von denjenigen Eigenschaften der Größen handelt, die sich aus dem Begriffe derselben, oder aus der Vorstellung, die wir uns davon machen, herleiten lassen; dagegen

2) empirisch oder angewandt, wenn sie jene Eigenschaften auf wirkliche Gegenstände der Erfahrung bezieht.

In der reinen Mathematik werden die Eigenschaften z. B. des Dreiecks abgehandelt, wie sie sich aus dem bloßen Begriffe von Dreieck ableiten lassen, welchen Begriff der Verstand bildet, unabhängig von aller Erfahrung, und unbekümmert darum, ob diesem Begriffe wirklich ein Gegenstand in der Erfahrung entspreche.

Diese Eigenschaften des Dreiecks an sich wendet nun die empirische Mathematik auf alle jene besonderen Dreiecke an, welche in der Erfahrung, z. B. bei der Feldmeßkunst vorkommen.

§. 3.

Theile der Mathematik.

Die Mathematik kann eingetheilt werden

I) in die allgemeine und

II) in die besondere.

Jene handelt von den Eigenschaften der Größen überhaupt, ohne auf eine bestimmte Gattung derselben Rücksicht zu nehmen; die besondere Mathematik aber untersucht die Eigenschaften bestimmter Gattungen von Größen.

§. 4.

Die allgemeine Mathematik ist nichts anderes, als

A) Arithmetik, oder die Lehre von den Eigenschaften der Zahlen.

Denn in die allgemeine Mathematik gehören nur jene Eigenschaften der Größen, welche ihnen, ohne Rücksicht auf besondere Gattungen, in Bezug auf ihre Quantität zukommen; die Quantitäten der Größen aber werden durch die Zahlen (§. 1. No. 7.) ausgedrückt.

Die Anwendung der Arithmetik auf Größen überhaupt pflegt man auch allgemeine Größenlehre zu nennen.

§. 5.

Die besondere Mathematik kann in so viele einzelne Zweige abgetheilt werden, als es verschiedene Gattungen von Größen gibt. Sie heißt insbesonders

B) Geometrie, wenn sie von den räumlich ausgedehnten Größen handelt.

§. 6.

Die Aritymetik theilt sich wieder ab

a) in die Elementararithmetik, in wie ferne sich die Untersuchungen der Arithmetik auf die Anfangsgründe einschränken; und

b) in die höhere Arithmetik, welche die Algebra die Funktionentheorie, die Differential- und die Integral-Rechnung in sich begreift.

*) Die Gränzen zwischen der elementaren, und der höheren Arithmetik sind schwankend.

§. 7.

Die Geometrie wird abgetheilt

a) in die Elementargeometrie, welche sich mit den zwei einfachsten Linien, nämlich mit der geraden und mit der Kreislinie, und mit solchen Flächen und Körpern beschäftigt, die sich durch diese Linien darstellen lassen; und

b) in die höhere Geometrie, welche die krummen Linien jeder Art, und alle davon begränzten oder daraus erzeugten Flächen und Körper untersucht.

Die Elementargeometrie zerfällt wieder

aa) in die ebene, und

bb) in die körperliche.

Jene (Planimetrie) handelt von jenen räumlichen Größen, welche in einer und derselben Ebene liegen.

Zu ihr gehört auch die ebene Trigonometrie und Polygonometrie, oder die Berechnung ebener Dreyecke und Vielecke.

Die körperliche Geometrie (oder Stereometrie) betrachtet nur solche räumliche Größen, deren Ausdehnung sich über verschiedene Ebenen erstreckt, oder auch den Raum nach seinen drei Abmessungen erfüllt.

Zu ihr gehört die sphärische Trigonometrie, oder die Berechnung der sphärischen Dreiecke.

§. 8.

Die angewandte Mathematik begreift in sich

I) die praktische Rechenkunst, oder die Anwendung der Arithmetik auf die gewöhnlichen Rechnungsfälle des Lebens;

II) die praktische Geometrie, oder die Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Bestimmung der Längen, Höhen und Flächen entweder auf der Oberfläche (Feldmeßkunst oder Geodäsie) oder unter der Oberfläche der Erde. (Markscheidekunst.)

Anmerk. Ueberdieß ist den Lehren der Mathematik noch ein weites Feld zur Anwendung geöffnet,

1) bei der Erforschung der Natur der Erde sowohl, als des Weltalls.

Denn nur durch die Anwendung der Mathematik auf die physikalischen Wissenschaften (im weitesten Sinne) wurden diese in den neueren Zeiten auf jene Höhe gehoben, von welcher man in den älteren Zeiten auch nicht eine Ahnung hatte; auch zeigt die Geschichte, daß jeder Versuch bei Erforschung der Natur, welcher die leitende Hand der Mathematik zurückwies, auf Abwege führte, und mit Irrthümern endigte.

2) Auch in der Ausbildung der architektonischen Wissenschaften (der bürgerlichen Baukunst, der Befestigungskunst, u. s. w.) und in der Behandlung der mechanischen und technischen Künste (der Artillerie, Optik, der gesammten Maschinenkunde, Schiffahrtskunde, u. s. w.) ist Mathematik unentbehrlich.

§. 9.

Uebersicht der Theile der Mathematik.

I) Arithmetik:

A) Reine Arithmetik:

1) niedere; und

2) höhere;

a) Algebra;

b) Funktionentheorie;

c) Differential- und Integral-Rechnung.

B) Angewandte Arithmetik:
Praktische Rechenkunst.

II. Geometrie:
A) Reine Geometrie:
1) niedere;
a) Planimetrie und ebene Trigonometrie;
b) Stereometrie und sphärische Trigonometrie.
2) höhere;
B) Praktische Geometrie.
1) Feldmeßkunst, (Geodäsie) und
2) Markscheidekunst.

Im gegenwärtigen Lehrbuche wird abgehandelt werden

I) im ersten Bande:
die reine Elementar-Arithmetik, in 3 Abtheilungen; und

II) im zweiten Bande:
die reine Elementar-Geometrie in 4 Abtheilungen.

§. 10.

Ueber die Methode der Mathematik.

Man geht in der Mathematik von Begriffen und Erklärungen aus, und bildet daraus Sätze, die erwiesen, Aufgaben, die gelöst werden müssen.

1) Eine Erklärung ist die deutliche und vollständige Darstellung des Begriffs einer Sache.

2) Ein Satz ist der Ausspruch über die Verbindung eines Merkmals (Prädikats) mit einem Gegenstande (Subjekte). Sätze heißen entgegengesetzt, durch welche einem Subjekte entgegengesetzte Prädikate zugesprochen werden, d. h. solche Prädikate, welche nicht zugleich in dem nämlichen Subjekte vereiniget gedacht werden können.

(Contradiktorisch und conträr entgegengesetzte Sätze.)

Man theilt die Sätze ein

a) in theoretische oder Behauptungssätze; diese sagen aus, daß etwas sei oder geschehe, und

b) in praktische oder Forderungssätze; diese sagen aus, daß etwas geschehen kann oder soll. In einem Behauptungssatze wird die Verbindung des Prädikats mit dem Subjekte schon, als wirklich vorhanden, gedacht, und die Art dieser Verbindung ausgesprochen; bei einem Forderungssatze aber, wird jene Verbindung nur als möglich vorausgesetzt, und gefordert, daß sie erst wirklich bewerkstelligt werde.

Die theoretischen Sätze sind

aa) Grundsätze (Axiomata), deren Wahrheit von Niemanden, der den Sinn derselben versteht, bezweifelt werden kann, welche daher, ohne daß sie einer ferneren Ableitung oder Begründung fähig oder bedürftig wären, Jedermann als wahr anerkennen muß, und

bb) Lehrsätze (Theoremata), deren Wahrheit aus anderen bekannten Wahrheiten abgeleitet werden muß, die also eines Beweises bedürfen.

Die praktischen Sätze sind,

aa) Forderungssätze (im engeren Sinne) Postulata), wenn die Art, wie das Geforderte bewerkstelligt werden soll, unmittelbar einleuchtet, so bald man nur versteht, was gefordert wird;

bb) Aufgaben (Problemata), welche einer Auflösung, d. h. der Angabe der Mittel, wodurch das Verlangte bewerkstelligt werden kann, bedürfen; die Richtigkeit der geschehenen Auflösung muß dann noch durch einen Beweis dargethan werden.

Noch pflegt man im Vortrage der Mathematik einigen Sätzen besondere Namen zu geben; nämlich

a) man nennt Sätze, deren Wahrheit aus den vorhergehenden sich entweder unmittelbar, oder doch wenigstens so leicht ergibt, daß man die Schlußfolge nicht anzugeben nothwendig hat, Folgerungen, (Corrollaria);

b) in Anmerkungen fügt man dasjenige bei, was keinen wesentlichen Bestandtheil des Systems ausmacht, aber doch zum Nutzen dienen kann; geschichtliche Notizen, u. s. w.

3) Beweis ist der Inbegriff der Gründe, auf welchen die Wahrheit eines Satzes beruht.

Der Beweis kann seyn

a) direkt, wenn die Wahrheit des Satzes geradezu gezeigt wird, und

b) indirekt, apagogisch, wenn er nur die Falschheit des contradiktorisch entgegengesetzten Satzes beweiset, wodurch man dann auf die Wahrheit des gegebenen Satzes schließt.

Wird der zu erweisende Satz in mehrere einzelne Sätze zerlegt gedacht, und durch den Beweis für die Richtigkeit dieser einzelnen Sätze auf die Gültigkeit des gegebenen Satzes geschlossen, und sind diese einzelnen Sätze nur Anwendungen des gegebenen in besonderen Fällen, so heißt der Beweis durch Induktion geführt.

Sind alle besonderen Fälle des gegebenen Satzes aufgezählt und bewiesen, so heißt der Induktionsbeweis vollständig, sonst unvollständig.

Eine unvollständige Induktion beweist den Satz nicht allgemein.

§. 11.

Jakob Bernoulli's Methode, einer unvollständigen Induktion die Kraft eines strengen Beweises zu verschaffen:

1) Man ordne alle Fälle nach einem gewissen Gesetze

dergestalt an einander, daß man durch Fortzählen von Fall zu Fall auf jeden möglichen Fall kommen muß, ohne daß einer dazwischen ausbleiben kann.

2) Man beweise die Richtigkeit des Satzes für den ersten Fall, oder auch für einige der ersten aufeinanderfolgenden Fälle.

3) Zeige man aus der Beschaffenheit des Gegenstandes daß der zu beweisende Satz jedesmal für den zunächst folgenden Fall gelten müsse, sobald er für den unmittelbar vorhergehenden, oder auch für alle vorhergehenden Fälle als richtig angenommen wird.

Durch die Erfüllung dieser drei Vorschriften ist der Beweis eines Satzes strenge und allgemein geliefert; denn wegen No. 2. gilt der Satz für den ersten Fall; daher wegen No. 3., auch für den zunächst folgenden, oder zweiten Fall; aus der Richtigkeit des zweiten folgt dann die Richtigkeit des dritten Falles, u. s. f.; und wegen No. 2. muß man auf jeden möglichen Fall kommen; daher der zu beweisende Satz in jedem möglichen Falle, d. h. allgemein richtig seyn muß.

Anmerk. Die mathematische Methode hat den auszeichnenden Vorzug, daß sie ihre Begriffe construiren, d. h. die denselben entsprechenden Gegenstände in ihrer Allgemeinheit anschaulich darstellen, folglich die Bestimmungen davon demonstriren kann, einen Vorzug, den die Philosophie, als Vernunftwissenschaft durch bloße Begriffe, entbehren muß. Aus dieser intuitiven Methode der Mathematik entspringt dann auch ihre Evidenz, die nur ihr eigenthümlich, und für alle anderen Wissenschaften nicht erreichbar ist.

§. 12.

Zeichen der Mathematik.

1) Das Zeichen der Gleichheit ist (=);

2) Das Zeichen der Ungleichheit ist $>$ oder $<$; die kleinere Größe wird an die Spitze, die größere an die Oeffnung gesetzt;

$A > B$ heißt A ist größer, als B, oder B ist kleiner, als A.

3) Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\backsim$;

4) . . . . der Congruenz ist $\cong$ oder $\overset{=}{\backsim}$;

5) Das Zeichen des Unendlichgroßen ist ∞, des Unendlichkleinen $\frac{1}{\infty}$.

§. 13.

Grundsätze der Mathematik.

1) Jede Größe ist sich selbst gleich;

$$A = A.$$

2) Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich.

3) Das Ganze ist größer, als ein Theil, oder einige Theile desselben.

4) Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; d. i.

wenn $A = B$
und $B = C$ ist,
so ist auch $A = C$.

5) Ist eine von zwei gleichen Größen größer, als eine dritte, so ist es auch die andere; d. i.

wenn $A = B$
und $A > C$ ist,
so ist auch $B > C$.

6) Ist eine von zwei gleichen Größen kleiner, als eine dritte, so ist es auch die andere; d. i.

wenn $A = B$
und $A < C$ ist,
so ist auch $B < C$.

7) Wenn eine Grösse grösser ist, als eine andere, und diese grösser, als eine dritte, so ist auch die erste grösser, als die dritte; d. i.

wenn $A > B$
und $B > C$ ist,
so ist auch $A > C$.

8) Wenn eine Grösse kleiner ist, als eine andere, und diese wieder kleiner, als eine dritte, so ist auch die erste kleiner, als die dritte; d. i.

wenn $A < B$
und $B < C$ ist,
so ist auch $A < C$.

9) Gleiches auf gleiche Art verändert, gibt wieder Gleiches; hingegen Gleiches auf ungleiche Art, oder Ungleiches auf gleiche Art verändert, gibt Ungleiches.

Erster Theil.

Die reine Elementararithmetik.

Erste Abtheilung.

I) Von den ganzen und gebrochenen Zahlen.

II) Von den Würden und Wurzeln.

Erstes Hauptstück.

Von ganzen und gebrochenen Zahlen.

Erster Abschnitt.

Von Zahlen überhaupt.

§. 14.

Erklärungen.

1) Jedes Ding für sich betrachtet, ist ein einzelnes, *und gibt* die Einheit.

2) Die bloße Vorstellung des Einsseyn's, oder auch einer Mehrheit, (mehrerer Einheiten) ohne darauf zu sehen, ob es gewisse Dinge, oder auch nur überhaupt Dinge seyen, heißt eine Zahl.

Auch die Zahl Eins kann aus Theilen bestehend gedacht werden, weil auch ein Ding in anderer Beziehung eine Mehrheit seyn kann.

4) Rechnen heißt aus gegebenen Zahlen andere bilden.

5) Zahlen, welche erst durch Rechnung gefunden werden sollen, nennt man unbekannte, die übrigen aber bekannte Zahlen.

6) Jede Zahl ist entweder eine allgemeine, oder eine besondere. Eine allgemeine Zahl ist der

Begriff einer Mehrheit, ohne zu bestimmen, welche Mehrheit es sei, denkt man sich aber eine bestimmte Mehrheit, so hat man eine besondere Zahl.

Eine allgemeine Zahl ist daher die allgemeine Form, unter welcher jede besondere Zahl begriffen seyn kann.

Als Zeichen der allgemeinen Zahlen braucht man die Buchstaben des lateinischen, griechischen, und mitunter auch des deutschen Alphabets.

7) Zwei allgemeine Zahlen sind deßwegen noch nicht einerlei, sondern sie dürfen nur dann als die nämliche Zahl betrachtet werden, wenn dieß entweder besonders vorausgesetzt, oder erwiesen worden ist.

8) Daher bezieht sich auch der nämliche Buchstabe in der nämlichen Rechnung immer auf die nämliche Zahl.

9) Jede besondere Zahl wird durch eigene Zeichen und Worte vorgestellt. (Ziffern)

10) Eine unbekannte Zahl kann, wenn sie auch eine besondere Zahl seyn sollte, dennoch durch das, ihr eigenthümliche Zeichen nicht vorgestellt werden, eben weil sie noch unbekannt ist.

Man pflegt die unbekannten, allgemeinen sowohl, als besonderen Zahlen durch die letzteren Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen.

11) Die Art, durch Zusammenstellung der Ziffern jede Zahl darzustellen, heißt Ziffernsystem.

12) Das dekadische oder Dezimalsystem, nach welchem immer zehn Einheiten einer Art zusammengenommen, eine höhere Einheit, und wieder zehn von diesen Einheiten, eine Einheit von noch höherer Art bilden, erfordert folgende 10 Zeichen:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Die Nulle ist eigentlich das Zeichen der Abwesenheit jeder Zahl.

13) Dasjenige Ziffernsystem, welches die wenigsten Zeichen verlangt, ist das dyadische; allein es leidet an

der Unbequemlichkeit, daß auch zur Darstellung von kleinen Zahlen schon viele Ziffern nothwendig sind.

14) Jede Ziffer hat einen doppelten Werth; nämlich: die Anzahl der Einheiten, welche die Ziffer, für sich allein betrachtet, darstellt, macht ihren natürlichen Werth aus; die Stelle aber, oder der Platz, welchen eine Ziffer, in Verbindung mit anderen Ziffern, einnimmt, bestimmt ihren Lokalwerth.

15) Eine gegebene Zahl durch Ziffern zu bezeichnen, oder eine durch Ziffern bezeichnete Zahl auszusprechen, heißt Numeriren.

16) Die Rechnung mit besonderen Zahlen oder Ziffern, heißt die Ziffernrechnung, dagegen mit allgemeinen Zahlen Buchstabenrechnung, weil die allgemeinen Zahlen mit Buchstaben bezeichnet werden.

17) In der Buchstabenrechnung sind die mit den nämlichen Buchstaben bezeichneten Zahlen gleichartig, die mit verschiedenen Buchstaben bezeichneten aber ungleichartig.

18) Zahlen heißen gleich oder ungleich, je nachdem sie einerlei oder nicht einerlei Mehrheit (Quantität) ausdrücken.

Bei ungleichen Zahlen heißt jene die größere, welche die Mehrheit der anderen als einen Theil in sich enthält; letztere heißt die kleinere.

Gleiche Zahlen sind eigentlich einerlei Zahl; sie können aber vielleicht durch verschiedene Rechnungen, oder aus verschiedenen anderen Zahlen gebildet worden seyn.

Folg. 1) Jede Zahl kann durch Hinzufügung anderer Zahlen vergrößert, oder durch Hinwegnahme derselben verkleinert werden; denn jede Mehrheit kann man mit einer anderen vereiniget, als eine einzige sich vorstellen, worin jene dann als Theil enthalten seyn wird; eben so kann man von einer Mehrheit von Dingen einige hinwegdenken, wodurch die zurückbleibenden nur ein Theil der vorigen seyn werden.

2) Wird von einer Zahl eine andere wiederholt hinweggenommen, so wird jene dadurch entweder ganz aufgehoben, oder es bleibt zuletzt eine Zahl übrig, welche kleiner ist, als die jedesmal weggenommene.

19) Eine Zahl, welche aus lauter Einsern bestehend gedacht werden kann, heißt eine ganze Zahl.

Daher kann auch jede ganze Zahl durch wiederholte Hinwegnahme von Eins wieder aufgehoben werden.

20) Wird eine Zahl aus lauter einerlei anderen Zahlen bestehend gedacht, so heißt jede der letzteren ein aliquoter Theil der ersteren.

Zur Bezeichnung eines aliquoten Theiles muß die ganze Zahl angegeben werden, welche anzeigt, aus wie vielen aliquoten Theilen die gegebene Zahl bestehend gedacht werde. Man sagt daher, z. B. der vierte, fünfte, . . . überhaupt nte Theil, und nennt diese Zahl den Nenner des aliquoten Theiles.

21) Eine Zahl, welche aus lauter aliquoten Theilen von Eins bestehend gedacht werden kann, ist eine gebrochene Zahl, oder ein Bruch.

Daher kann auch ein Bruch durch wiederholte Hinwegnahme des nämlichen aliquoten Theils von Eins wieder aufgehoben werden.

22) Jede Zahl, welche als eine ganze oder gebrochene Zahl dargestellt werden kann, heißt rational; alle anderen Zahlen heißen irrational.

Anmerk. 1) Die vier einfachen Rechnungsarten mit Ziffern werde ich hier übergehen, theils, weil ich sie als bereits bekannt voraussetzen darf, theils, weil sie ihre wissenschaftliche Begründung erst durch die Rechnung mit allgemeinen Zahlen erhalten können.

Anmerk. 2) Die im §. 13. für Größen überhaupt ausgesprochenen Grundsätze gelten auch für Zahlen; denn wir betrachten hier nur die Eigenschaften der Größen in

Bezug auf ihre Quantität; diese Quantitäten aber werden durch Zahlen ausgedrückt.

Daher auch im Verlaufe der Arithmetik immer, wenn von Größen die Rede ist, die Zahlen zu verstehen sind, durch welche die Quantitäten der Größen ausgedrückt werden.

Zweiter Abschnitt.

Von den einfachen Rechnungsarten mit ganzen Zahlen.

A. Addition.

§. 15.

Erklär. 1) Zahlen addiren, heißt dieselben, als Theile betrachtet, zu einer einzigen Zahl (zu einem Ganzen) zusammennehmen, so daß die letztere Zahl den gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist.

2) Die zu addirenden Zahlen heißen Posten oder Summanden; die Zahl, die als Resultat erscheint, heißt Summe.

3) Das Zeichen der Addition ist + (plus, oder mehr), und wird zwischen die Summanden gesetzt; z. B. $a + b$.

Folg. 1) Da die Theile eines Ganzen gleichartig seyn müssen, so kann man nur Gleichartiges zu einem Ganzen verbinden, d. h. addiren.

2) Die nämlichen Zahlen geben einerlei Summe, in was immer für einer Ordnung sie addirt werden mögen;

denn die Summe ist die Zahl, in welcher alle zu addirenden Zahlen als Theile enthalten sind; so lange also diese Zahlen die nämlichen bleiben, muß auch die Summe einerlei bleiben, indem die Anordnung der Theile auf ihre Quantität keinen Einfluß haben kann.

3) Von zwei ungleichen Zahlen kann die größere als Summe der kleineren und einer dritten Zahl betrachtet werden;

denn (§. 14. Nro. 18.) die größere Zahl enthält die kleinere, als Theil in sich; denkt man sich daher noch den anderen darin enthaltenen Theil, so wird derselbe sammt der kleineren Zahl die größere zur Summe haben.

4) Die nämlichen Zahlen haben nur Eine Summe; denn gäbe es zwei ungleiche Summen der nämlichen Zahlen, so müßte in der größeren aus ihnen, die kleinere, als ein Theil enthalten seyn; da nun auch in der kleineren Summe alle zu addirenden Zahlen enthalten seyn müssen, so würde die größere ausser denselben noch etwas mehr enthalten, und daher gar nicht ihre Summe seyn.

5) Eine Summe wird zu einer andern Zahl addirt, wenn man jeden Theil derselben einzeln hinzuaddirt; denn die neue Summe muß die zu addirende Summe, als einen Theil in sich enthalten, daher müssen in der ersteren auch alle Theile, aus welchen die letztere besteht, enthalten seyn; d. h. jene ist die Summe aller dieser Theile, und der anderen noch zu addirenden Zahl.

Daher auch umgekehrt die Addition mehrerer Zahlen auf einmal vorgenommen werden kann, sobald man die Summe aller auf einmal addirt;

z. B. $8 + (9 + 6) = 8 + 9 + 6 = 23$,
oder $8 + 15 = 23$.

§. 16.

Erklär. Steht die nämliche Zahl mehrmals als Summand, so schreibt man sie nur einmal, und setzt ihr eine Ziffer vor, welche angibt, wie oft die Zahl als Summand steht, und Coeffizient heißt;

z. B. $a + a + a = 3a$.

Der Coeffizient 1 wird nicht angeschrieben; d. i.
$1a = a$.

§. 17.

1) Gleiche Zahlen zu gleichen Zahlen addirt, geben gleiche Summen;

d. i. wenn $A = B$
und $C = D$ ist,
so ist auch $A + C = B + D$; wegen §. 15. Folg. 4.

2) Werden zu gleichen Zahlen ungleiche, oder umgekehrt zu ungleichen gleiche Zahlen addirt, so ist die Summe auch ungleich, und jene Summe ist größer, in welcher die größere Zahl ist;

d. i. wenn $A = B$ und
$C > D$ ist, so ist
$A + C > B + D$;
denn es ist $C = D + E$ (§. 15. Folg. 3.)
und $A = B$
folglich $A + C = B + D + E$ oder
$A + C > B + D$.

3) Die Summe zweier Zahlen ist größer, als die Summe von zwei anderen, einzeln genommen, kleineren Zahlen; d. i.

wenn $A > B$ und
$C > D$ ist, so ist nach Nro. 2.
$A + C > B + C$ und
$B + C > B + D$; folglich nach §. 13. Nro. 7.
$A + C > B + D$.

B. Subtraktion.

§. 18.

Erklär. 1) Eine Zahl von einer andern subtrahiren, oder abziehen, heißt, eine solche Zahl suchen, welche, zur ersteren addirt, die letztere zur Summe gibt.

2) Jene Zahl, die abgezogen wird, heißt Subtrahend, diejenige, von welcher abgezogen wird, Minuend, und die Zahl, welche man erhält, Rest, Unterschied oder Differenz.

3) Das Zeichen der Subtraktion ist — (minus, weniger), welches zwischen Minuend und Subtrahend gesetzt wird.

Folg. 1) Durch die Subtraktion wird das Ganze wieder in seine Theile aufgelöst; daher kann man nur Gleichartiges von einander abziehen.

2) Daher muß der Rest zum Subtrahend addirt, immer wieder den Minuend zum Vorschein bringen. (Probe für die Subtraktion.)

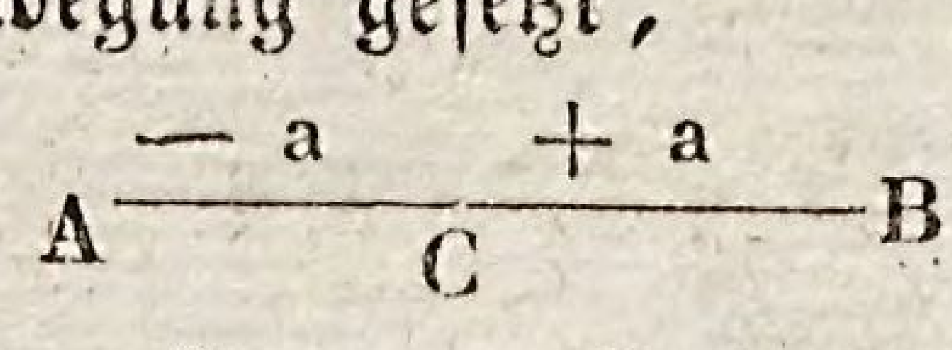
3) Daher wird man auch bei einer durch die Addition gefundenen Summe, wenn man von derselben einen Summanden abzieht, die übrigen als Rest erhalten. (Probe für die Addition.)

§. 19.

Größen oder Zahlen heißen übereinstimmend, wenn sie bei ihrer Verbindung einander vermehren; dagegen heißen sie

entgegengesetzt, wenn sie durch ihre Vereinigung einander vermindern, so daß die kleinere verschwindet, von der größeren aber so viel übrig bleibt, als ihr Ueberschuß beträgt; z. B. Gewinn und Verlust, Schulden und Vermögen, Vorwärts- und Rückwärtsgehen, Steigen und Fallen u. s. w.

Denkt man sich einen Körper von dem Punkte C aus in Bewegung gesetzt,



und in B angekommen, so hat derselbe einen gewissen Weg zurückgelegt, welcher mit a bezeichnet werde; der Körper kann sich aber auch nach der Richtung C A bewegen, wodurch er, in A angekommen, dieselbe Strecke (Länge) des Wegs a, wie vorher, zurückgelegt haben wird. Betrachtet man nun die beiden Strecken Wegs (a und a) nicht einzeln für sich, und ohne Beziehung, sondern nach ihrer

Richtung, in Beziehung auf den Punkt C, wodurch der eine Weg die Richtung vorwärts, der andere die Richtung rückwärts erhält, so werden sie einander entgegengesetzt.

Von zwei entgegengesetzten Größen heißt man die eine (übrigens willkührlich welche) die positive, und bezeichnet sie mit dem Zeichen +, die andere die negative, und bezeichnet sie mit —. Daher gestalten sich die obigen Größen zu + a und — a.

Folg. 1) Umgekehrt werden daher Zahlen, wovon die eine das Zeichen +, und die andere das Zeichen — vor sich hat, sich ganz wie entgegengesetzte Zahlen oder Größen verhalten, und auch so behandelt werden können.

2) Entgegengesetzte Größen bestehen als solche eben nur durch ihre Entgegensetzung; ausser ihrem Gegensatze, d. h. an sich betrachtet, verhalten sie sich gerade wie andere Größen.

3) Daher ist die Behauptung, daß negative Größen weniger seyen, als Nichts, wahr und falsch.

Sie ist wahr, in wie ferne man die negativen Größen im Gegensatze zu den positiven betrachtet, und nur letztere als geltende Größen annimmt; z. B. wer 100 Gulden Schulden hat, besitzt weniger als Nichts; denn er muß sich 100 Gulden erwerben, um erst sagen zu können, er habe Nichts im Vermögen. Wer um 6 Stunden von einem bestimmten Ausgangspunkte rückwärts steht, muß freilich auf die Frage, wie weit er von dem Ausgangspunkte vorwärts sey, antworten: um weniger als Nichts.

Dagegen ist die obige Behauptung falsch, wenn man die negativen Größen für sich bestehend, ohne Gegensatz zu den positiven, betrachtet. Denn wie sollte denn eine Strecke Wegs von 6 Stunden rückwärts nicht eine wirkliche Wegstrecke, nicht eine wirkliche Größe (Länge) seyn?

Die vor einer Zahl stehenden Zeichen + oder — haben daher keinen Einfluß auf ihren Werth, sondern sie

zeigen blos an, in welchem Sinne dieselbe hinsichtlich des Resultats der Rechnung zu nehmen ist. Handelt es sich daher im Resultate einer Rechnung um Vermögen, so bedeutet alles Negative Schulden; handelt es sich aber um Schulden, so deuten die negativ erscheinenden Zahlen auf Vermögen.

Anmerk. Im folgenden §. soll die dem A entgegengesetzte Zahl mit n A bezeichnet werden.

§. 20.

Sätze für die entgegengesetzten Größen oder Zahlen.

1) Gleiche entgegengesetzte Zahlen heben einander völlig auf; d. i.

$$A + n A = o;$$

z. B. 6 Gulden Vermögen und 6 Gulden Schulden sind zusammen Null Vermögen.

2) Entgegengesetzte Zahlen addiren, ist eben so viel, als eine der kleineren gleiche, mit der größeren übereinstimmende Zahl von dieser letzteren subtrahiren.

Es ist $6 A = 6 A + 2 A + 2 n A;$

folglich $6 A + 2nA = 6 A - 2 A = 4 A;$

z. B. 6 Gulden Vermögen + 2 Gulden Schulden sind gleich 6 Gulden Vermögen — 2 Gulden Vermögen.

3) Von einer Zahl eine andere abziehen, ist eben so viel, als zu ersterer eine der letzteren gleiche, aber derselben entgegengesetzte addiren; d. i.

$6 A - 2 A = 6 A + 2 n A$; (aus Nro. 2.)

z. B. 6 Gulden Vermögen — 2 Gulden Vermögen sind gleich 6 Gulden Vermögen + 2 Gulden Schulden.

4) Von einer Zahl eine ihr entgegengesetzte subtrahiren, ist eben so viel, als eine der letzteren gleiche mit der ersteren übereinstimmende addiren;

d. i. $6 A - 2 n A = 6 A + 2 A;$

z. B. 6 Gulden Vermögen — 2 Gulden Schulden sind gleich 6 Gulden Vermögen + 2 Gulden Vermögen;

denn $6\,A = 6\,A + 2\,A + 2\,n\,A$;

nimmt man nun $2\,n\,A$ hinweg, so bleibt

$$6\,A - 2\,n\,A = 6\,A + 2\,A.$$

5) Zu einer Zahl eine andere addiren, ist eben so viel, als von der ersteren das gleiche Gegentheil der anderen subtrahiren; d. i.

$$6\,A + 2\,A = 6\,A - 2\,n\,A; \text{ (aus Nro. 4.)}$$

z. B. 6 Gulden Vermögen + 2 Gulden Vermögen sind so viel, als 6 Gulden Vermögen — 2 Gulden Schulden.

§. 21.

1) Gleiche Zahlen von gleichen abgezogen, geben gleiche Unterschiede;

d. i. wenn $A = B$

und $C = D$ ist,

so ist $A - C = B - D$;

denn die Unterschiede müssen zu den gleichen Subtrahenden addirt, die gleichen Minuenden, als Summen geben, was, wegen §. 17. Nro. 1., nicht seyn könnte, wenn sie ungleich wären.

2) Werden von gleichen Zahlen ungleiche abgezogen, so gibt der kleinere Subtrahend den größeren Rest; d. i.

wenn $A = B$ und

$C > D$ ist, so ist

$$A - C < B - D.$$

Denn man setze

$A - C = E$; so wird $A = C + E$;

und $B - D = F$; so wird $B = D + E$;

wäre nun $E = F$ oder $E > F$, so müßte nach §. 17., Nro. 2. und 3.,

$C + E > D + F$ oder

$A > B$ seyn. (contra hyp.)

3) Werden von ungleichen Zahlen gleiche abgezogen, so gibt der größere Minuend den größeren Rest; d. i.

$$\begin{array}{l} \text{wenn } A > B \text{ und} \\ \underline{C = D \text{ ist, so ist}} \\ A - C > B - D. \end{array}$$

Denn man setze wieder

$A - C = E$, so wird $A = C + E$;

und $B - D = F$, so wird $B = D + F$;

wäre nun $E = F$ oder $E < F$, so müßte

$C + E = D + F$; d. h. $A = B$;

oder $C + E < D + F$; d. h. $A < B$ seyn.

(contra hyp.)

4) Zieht man von der größeren aus zwei Zahlen die kleinere aus zwei anderen Zahlen, hingegen von der kleineren die größere ab, so ist der erstere Rest größer, als der letztere; d. i.

$$\begin{array}{l} \text{wenn } A > B \text{ und} \\ \underline{C < D \text{ ist, so ist}} \\ A - C > B - D. \end{array}$$

Denn aus Nro. 3. folgt

$A - C > B - C$

und aus Nro. 2.

$B - C > B - D$; mithin nach §. 13. Nr. 7.

$A - C > B - D$.

§. 22.

Lehrs. Eine Summe wird von einer Zahl abgezogen, wenn man jeden Theil der Summe einzeln abzieht; d. i. $A - (B + C + \ldots) = A - B - C - \ldots$

Bew. Denn es ist

$A = A - B - C - \ldots + (B + C + \ldots)$

nimmt man nun die Summe $+ (B + C + \ldots)$ hinweg, so bleibt übrig

$A - B - C - \ldots$

Und umgekehrt können mehrere Zahlen auch auf einmal abgezogen werden, wenn man ihre Summe abzieht.

Folg. Daher ist es auch einerlei, in welcher Ordnung mehrere Zahlen von der nämlichen andern Zahl abgezogen werden; denn es ist immer so viel, als ob die Summe jener Zahlen abgezogen würde, und diese Summe bleibt einerlei, in welcher Ordnung auch ihre Theile genommen werden mögen.

§. 23.

Lehrs. Man erhält einerlei Resultat, wenn man zu einer Zahl A zuerst eine andere B addirt, und dann eine dritte C subtrahirt, oder wenn man zuerst C subtrahirt, und dann B addirt; d. i.

$$A + B - C = A - C + B.$$

Bew. 1) Wenn $B = C$ ist,

dann ist $\left.\begin{array}{l} A + B - C = A \\ A - C + B = A \end{array}\right\}$ nach §. 20. Nro. 1.
und

folglich $A + B - C = A - C + B$.

2) Wenn $B > C$ ist,

dann kann $B = D + C$ seyn; (nach §. 15. Folg. 3.)

folglich ist $A + B - C = A + D + C - C$
$= A + D$;

eben so $A - C + B = A - C + C + D$
$= A + D$;

folglich $A + B - C = A - C + B$.

3) Wenn $B < C$ ist,

dann kann $C = D + B$ gesetzt werden;

folglich wird $A + B - C = A + B - B - D$
$= A - D$;

eben so ist $A - C + B = A - D - B + B$
$= A - D$;

folglich $A + B - C = A - C + B$.

§. 24.

Lehrs. Die nämlichen Zahlen können in was immer für einer Ordnung zu einander addirt, oder von einander subtrahirt werden.

Bew. Denn nach §. 15., Nro. 2.; §. 22., Folg., und §. 23. kann die Ordnung von jeden zwei aufeinander folgenden Zahlen vertauscht werden, sie mögen gleiche Zeichen haben oder ungleiche. Daher kann man nach und nach jede einzelne Zahl an einen beliebigen Platz bringen, ohne dadurch die gesammte Zahl zu verändern.

§. 25.

Erklär. Ein Ausdruck von Zahlen heißt zusammengesetzt oder vieltheilig, wenn er aus mehreren durch die Zeichen + oder — verbundenen Theilen besteht; sind die einzelnen Zahlen aber durch keines dieser beiden Zeichen verbunden, so heißt der Ausdruck einfach oder eintheilig. Die durch die Zeichen + oder — verbundenen Theile heißen die Glieder;

z. B. $5\,a\,b + m\,n - b\,c\,d + 12\,x$ ist ein vieltheiliger, und zwar ein viertheiliger Ausdruck; dagegen $a\,b\,c\,d$ ein einfacher oder eintheiliger.

§. 26.

Aufg. Gegebene einfache Zahlenausdrücke zu addiren.

Aufl. I.) Die ungleichartigen Ausdrücke werden mit ihren Zeichen neben einander gesetzt; (§. 15. Folg. 1.)

II.) Für die gleichartigen Ausdrücke gelten folgende Regeln:

1) Bei gleichen Zeichen addirt man die Coeffizienten, und gibt der Summe das gemeinschaftliche Zeichen;

2) bei ungleichen Zeichen subtrahirt man den kleineren Coeffizienten von dem größeren, und gibt dem Reste das Zeichen des größeren; die Buchstaben bleiben in beiden Fällen ungeändert.

Bew. für Nro. 1. Denn die Zahlen sind übereinstimmend, machen also allemal als Theile ein Ganzes von der nämlichen Beschaffenheit aus, oder das Ganze bekömmt immer das Zeichen seiner Theile;

z. B. $+ 4\,a + 3\,a = + 7\,a$

$- 4\,a - 3\,a = - 7\,a.$

Bew. für 2. Hier sind die Zahlen entgegengesetzt, (§. 19. Folg. 1.); folglich gelten die Sätze Nro. 1. und Nro. 2. des §. 20;

z. B. $+4a-2a=+2a$;
$-4a+2a=-2a$;
$+4a-4a=o$.

§. 27.

Aufg. Einfache Zahlenausdrücke von einander zu subtrahiren.

Aufl. Man verändere im Subtrahende die Zeichen in die entgegengesetzten, und verfahre dann nach den für die Addition gegebenen Vorschriften. (§. 26.)

Fälle	Erster	Zweiter	Dritter	Vierter
Minuend	$+a$	$+a$	$-a$	$-a$
Subtrahend	$+b$	$-b$	$+b$	$-b$
Rest	$a-b$	$a+b$	$-a-b$	$-a+b$

Bew. 1) $a-b$ folgt aus §. 20. Nro. 3.

2) Man setze (nach §. 20. Nro. 1.)

$$a+b-b=a;$$

nimmt man daher $-b$ weg, so bleibt

$$a+b.\ (\text{§. 20., Nro. 4.})$$

3) Man setze wieder

$$-a+b-b=-a;$$

nimmt man $+b$ hinweg, so bleibt

$$-a-b;\ (\text{§. 20., Nro. 4.})$$

4) Man setze wieder

$$-a+b-b=-a;$$

nimmt man nun $-b$ hinweg, so bleibt

$$-a+b;\ (\text{§. 20, Nro. 3.})$$

Sind die Ausdrücke ungleichartig, so setzt man sie nebeneinander, nachdem man zuvor im Subtrahende die Zeichen geändert hat.

§. 28.

Lehrs. Jeder zusammengesetzte Ausdruck kann, als Unterschied der Summe aller negativen von der Summe aller positiven Glieder, dargestellt werden.

Bew. Denn man kann, weil nach §. 24. die Glieder eines zusammengesetzten Ausdruckes in jeder Ordnung addirt oder subtrahirt werden dürfen, zuerst alle positiven Glieder addiren, und dann erst die negativen sabtrahiren; dieß letztere geschieht aber, indem man nach §. 22. die Summe aller negativen Glieder abzieht.

*) Man schließt gewöhnlich jeden zusammengesetzten Ausdruck zwischen Klammern ein, um damit anzudeuten, daß er als ein Ganzes zu betrachten sey. Die allgemeine Form eines solchen zusammengesetzten Ausdrucks wird daher seyn $= B - C$, wenn B die Summe aller positiven, und C die Summe aller negativen Glieder bedeutet; d. h.

wenn $B = a + b + c + \ldots$
und $C = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$ ist.

§. 29.

Hiedurch und durch die vorhergehenden Regeln wird man nun in den Stand gesetzt seyn, zusammengesetzte Ausdrücke sowohl zu einander zu addiren, als von einander zu subtrahiren.

I.) Ein zusammengesetzter Ausdruck (B — C) wird zu einer Zahl A addirt, oder von einer Zahl A subtrahirt, wenn man alle Glieder desselben mit unveränderten, oder mit veränderten Zeichen beisetzt.

Man setze $B - C = D$, mithin $D + C = B$.
Hieraus folgt
$$A + B = A + D + C$$

$A + B - C = A + D + C - C = A + D$ oder
$A + B - C = A + (B - C)$; oder (nach §. 28)
$A + (B - C) = A + (a + b + c + \ldots) - (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$ d. i. (§. 22. und §. 15. Folg. 5.)
$= A + a + b + c + \ldots - \alpha - \beta - \gamma + \ldots$

Auf die nämliche Weise wird

$$A - B = A - (D + C)$$
$$= A - D - C; \text{ und}$$
$$A - B + C = A - D.$$

Es ist aber $A - D = A - (a + b + c + \ldots) + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$;
folglich $A - B + C = A - a - b - c - \ldots + \alpha + \beta + \gamma + \ldots$

II) Sind mehrere zusammengesetzte Ausdrücke theils zu addiren, theils zu subtrahiren, so kann dieß entweder nach und nach oder auf einmal geschehen, indem man die Glieder der zu addirenden Ausdrücke mit ihren Zeichen, die der zu subtrahirenden Ausdrücke aber mit entgegengesetzten Zeichen hinsetzt.

Beispiele.

I) Ueber die Addition.

1) $(a + b) + (a - b) = 2a$

2) $(x + 3xyz + 3xz + y)$
$+ \underline{(x - 3xyz - 3xz - y)}$
Summe: $+ 2x$.

3) $(2a + 4b - 5c + 3ab + m)$
$+ \underline{(a - 2b - 3c - 7ab - n)}$
Summe: $3a + 2b - 8c - 4ab + m - n$.

4) $(4a + 2b + 3c)$
$+ (-3a - 3b - 5c)$
$+ (a + 4b - 7c)$
$+ \underline{(-17a - 5b + 9c)}$
Summe: $- 15a - 2b$.

II) Ueber die Subtraktion.

1) $(a + b) - (a - b) = 2b$

2) $(3a + 2b - 8c - 4ab + m - n)$

$- (+ a - 2b - 3c - 7ab + m)$

$\quad - \quad + \quad + \quad + \quad -$

Rest: $2a + 4b - 5c + 3ab - n.$

§. 30.

Erklär. Jene Zahl C, welche zu einer gegebenen Zahl N addirt, die nächst höhere Einheit U, d. i. eine Zahl erzeugt, die zur höchsten Ziffer 1, und nachher so viele Nullen hat, als die gegebene Zahl Ziffern, heißt die dekadische Ergänzung der gegebenen Zahl;

d. i. $N + C = U;$

$48 + 52 = 100.$

Folg. Man findet zu einer gegebenen Zahl ihre dekadische Ergänzung, wenn man jene von der Einheit ihrer nächst höhern Ordnung abzieht; denn da

$$N + C = U$$
$$N = N \text{ ist,}$$

so wird $C = U - N.$

Man kann jedesmal die dekadische Ergänzung einer gegebenen Zahl finden, ohne daß man nöthig hat, die Einheit der nächst höheren Ordnung anzuschreiben; man darf nur die letzte Ziffer der gegebenen Zahl von 10, alle übrigen Ziffern von 9 abziehen.

§. 31.

Lehrs. Eine Zahl N wird von einer andern Zahl M subtrahirt, wenn man die dekadische Ergänzung C der Zahl N zu M addirt, und von der Summe die Einheit der nächst höheren Ordnung U subtrahirt; d. i.

$$M - N = (M + C) - U.$$

Bew. Es ist $N + C = U$

und $C = C$;

folglich $N = U - C$.

Ferner ist

$$M = M$$

und $N = U - C$;

folglich $M - N = M - U + C$

$$= (M + C) - U.$$

Beisp. Man soll 7893 von 9756 subtrahiren.

Es ist $M = 9756$

$C = 2107$

$M + C = 11863$

$U = 10000$

$M - N = 1863$

Diese Methode, vermittels der Addition der dekadischen Ergänzung zu subtrahiren, gewährt besonders bei Rechnungen mit Logarithmen viele Bequemlichkeit.

C. Multiplikation.

§. 32.

Erklär. Eine Zahl M mit einer anderen m multipliziren, heißt aus der Zahl M eine dritte Zahl P so entstehen lassen, wie m aus der Einheit entstanden gedacht werden kann.

Die Zahl M, welche multiplizirt wird, heißt der Multiplikand; die Zahl m, mit welcher multiplizirt wird, heißt Multiplikator; beide zusammen heißen Faktoren; die durch die Multiplikation erzeugte Zahl P heißt Produkt.

Folg. Ist m eine ganze Zahl, so entsteht dieselbe nach §. 14. No. 19 durch wiederholte Addition von Eins, daher muß auch das Produkt durch eine eben so oft wiederholte Addition des Multiplikands entstehen.

Ist m eine gebrochene Zahl, so entsteht sie wegen §. 14. No. 21 durch wiederholte Addition eines aliquoten

Theiles von Eins; daher muß auch das Produkt durch eine eben so oft wiederholte Addition des nämlichen aliquoten Theiles des Multiplikands entstehen.

Die Multiplikation ist daher eine abgekürzte Addition.

§. 33.

Das Zeichen der Multiplikation ist ein schiefes Kreuz (X) oder ein Punkt (.), zwischen Multiplikand und Multiplikator gesetzt; z. B. 3×4 oder $3 . 4$.

Die allgemeinen Zahlen (Buchstaben) können in der Multiplikation ohne irgend ein Zeichen nebeneinander gesetzt werden; z. B. $ab = a \times b$; dieß darf aber nicht bei den besondern Zahlen (Ziffern) geschehen.

Zusammengesetzte Faktoren müssen in Klammern eingeschlossen werden.

Man unterscheide folgende Ausdrücke wohl von einander:

1) $A + B . C + D$;
2) $(A + B) (C + D)$;
3) $A + B (C + D)$;
4) $(A + B) C + D$.

§. 34.

Erklär. 1. Wenn die nämliche Zahl A mehrmals als Faktor steht, so setzt man sie nur einmal, und fügt ihr eine Ziffer bei, welche anzeigt, wie oft A als Faktor steht, und Exponent heißt;

z. B. $A . A . A . A = A^4$.

A^4 wird also gesprochen: A viermal als Faktor.

2) Durch Vergleichung dieses §. mit §. 16. ergibt sich der Unterschied zwischen Coeffizienten und Exponenten.

3) Der Exponent kann auch eine allgemeine Zahl seyn; z. B. A^x.

Folg. Der Exponent 1 wird nicht angeschrieben;
d. i. $a^1 = a$;
denn jede Zahl steht schon durch sich selbst einmal als Faktor.

Der Gebrauch der Exponenten wurde in der ersten Hälfte des siebenzehnten Jahrhunderts durch den französischen Gelehrten Cartesius (Descartes) eingeführt.

§. 35.

Gesetz für die Zeichen bei der Multiplikation.

Das Produkt bekömmt das Zeichen + oder —, je nachdem die beiden Faktoren einerlei, oder verschiedene Zeichen haben; d. i.

Erster Faktor	+	+	—	—
Zweiter Faktor	+	—	+	—
Produkt	+	—	—	+

Bew. Hat der Multiplikator das Zeichen +, so entstand er aus der Einheit dadurch, daß man diese als eine *additive* Größe, d. h. sie selbst setzte, so wie sie beschaffen ist, folglich muß man auch den Multiplikand so setzen, wie er beschaffen ist, um das Produkt zu erhalten. Hat aber der Multiplikator das Zeichen —, so entstand er aus der Einheit dadurch, daß man ihr Gegentheil (— 1) setzte; daher muß man auch das Gegentheil vom Multiplikand setzen, um das Produkt zu erhalten;

d. i. $+ a \times + 4 = + a + a + a + a$
$= + 4 a.$
$- a \times + 4 = - a - a - a - a$
$= - 4 a$
$+ a \times - 4 = - a - a - a - a$
$= - 4 a$
$- a \times - 4 = + a + a + a + a$
$= + 4 a.$

§. 36.

Lehrs. Eine Summe wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man jedes Glied der Summe mit der Zahl multiplizirt, und die erhaltenen einzelnen Produkte addirt; d. i.
$(A + B + C + \ldots) M = AM + BM + CM + \ldots.$

Bew. Offenbar wird das Ganze (denn als solches wird die Summe betrachtet,) mit der Zahl M multiplizirt, wenn man jeden einzelnen Theil mit der gegebenen Zahl M multiplizirt.

§. 37.

Lehrs. Eine Zahl M wird mit der Summe mehrerer anderer Zahlen multiplizirt, wenn man sie mit jedem Gliede der Summe multiplizirt, und die erhaltenen einzelnen Produkte addirt; d. i.
$M (B + C + D + \ldots) = MB + MC + MD + \ldots$

Bew. Man multiplizirt offenbar die Zahl M mit der ganzen Summe, wenn man sie mit jedem einzelnen Theile derselben multiplizirt.

§. 38.

Lehrs. Eine Summe wird mit einer Summe multiplizirt, wenn man jedes Glied des Multiplikands mit jedem Gliede des Multiplikators multiplizirt, und diese Produkte zusammenaddirt; d i.

$$(A + B + C)(D + E) = AD + BD + CD + AE + BE + CE.$$

Bew. Nach §. 36. muß jedes Glied des Multiplikands mit dem Multiplikator multiplizirt werden; dieß geschieht aber nach §. 37, indem man jedes solche Glied des Multiplikands mit jedem Gliede des Multiplikators multiplizirt, und diese Produkte addirt.

§. 39.

1) Gleiche Zahlen mit gleicher multiplizirt, geben gleiche Produkte; d. i.

$$\frac{\text{wenn } A = B \text{ und } C = D \text{ ist,}}{\text{so ist } A.C = B.D.}$$

Denn der nämliche Multiplikand und Multiplikator können nach der Erklärung von Multiplikation (§. 32.) nur ein Produkt geben.

2) Bei gleichen Multiplikanden gibt der größere Multiplikator das größere Produkt; d. i.

$$\frac{\text{wenn } A = B \text{ und } C > D \text{ ist, so ist}}{A.C > B.D.}$$

Denn man kann $C = D + E$ setzen, (§. 15. Folg. 3.)
woraus $A.C = B(D+E)$
$= B D + BE$ folgt;
mithin ist $A C > B D$.

2) Bei gleichen Multiplikatoren gibt der größere Multiplikand das größere Produkt; d. i.

$$\frac{\text{wenn } A > B \text{ und } C = D \text{ ist, so wird}}{A.C > B.D.}$$

Die Ableitung geschieht ganz auf die nämliche Weise, wie in No. 2.

4) Der größere Multiplikand mit dem größeren Multiplikator gibt das größere Produkt; d. i.

$$\frac{\text{wenn } A > B \text{ und } C > D \text{ ist, so ist}}{A.C > B.D;}$$

denn aus No 3 folgt $A.C > B.C$,
und aus Nr. 2 folgt $B.C > B.D$, folglich
$A.C > B.D.$

§. 40.

1) Ist der eine Faktor 1, so ist das Produkt dem anderen Faktor gleich; (d h. 1 multiplizirt nicht.)

Ist der Multiplikator 1, so entsteht derselbe aus 1,

indem man 1 nimmt, wie es ist; daher muß auch das Produkt dadurch entstehen, daß man den Multiplikand nimmt, wie er ist; d. i.

$$A . 1 = A.$$

Ist der Multiplikand 1, so entsteht das Produkt aus ihm eben so, wie der Multiplikator, d. h. Produkt und Multiplikation sind einerlei Zahl; d. i.

$$1 . A = A.$$

Deßwegen wird der Coeffizient 1 nicht angeschrieben.

2) Ist ein Faktor $\gtrless$ 1, so ist auch das Produkt größer, oder kleiner, als der andere Faktor.

3) Ist ein Faktor 0, so ist das Produkt auch 0. Denn ist der Multiplikator 0, so entsteht er aus 1, indem man 1 wegläßt; daher wird auch das Produkt aus dem Multiplikand entstehen, indem man diesen wegläßt.

Aus dem Multiplikand Null kann auf keine Weise eine Zahl entstehen, was auch der Multiplikator für eine Zahl seyn mag.

4) Zwei Faktoren geben, in jeder Ordnung genommen, einerlei Produkt; denn das Produkt zweier Faktoren muß den einen Faktor so oft enthalten, als der andere Faktor die Einheit; d. i.

$$a\,b = b\,a,$$

und $3 \times 4 = 4 \times 3.$

Daher ist es einerlei, welchen von zwei Faktoren man zum Multiplikand und zum Multiplikator annehmen will.

§. 41.

Lehrs. Der Unterschied zweier Zahlen wird mit einer Zahl A multiplizirt, wenn man jede einzelne Zahl damit multiplizirt, und zuletzt die Produkte abzieht; d. i.

$$(B - C)\,A = B\,A - C\,A.$$

Bew. Es sey $B - C = D$; so wird

$B = C + D$, und da

$$A = A \text{ ist,}$$
$$\text{so ist auch } B\,A = (C + D)\,A$$
$$= CA + DA; \text{ mithin}$$
$$BA - CA = CA + DA - CA$$
$$= DA$$
$$= (B - C)\,A.$$

Auf die nämliche Weise wird man auch

$BA - CA = A\,(B - C)$ erhalten.

Folg. Aus §. §. 36, 37 und 41 folgt, daß, wenn mehrere Produkte den nämlichen Faktor haben, man denselben abkürzungsweise nur einmal zu setzen braucht; d. i.

$$AC + BC = C\,(A + B); \quad (\S.\ 37.)$$
$$= (A + B)\,C; \quad (\S.\ 36.)$$
$$\left.\begin{aligned} BA - CA &= (B - C)\,A \\ &= A\,(B - C). \end{aligned}\right\} (\S.\ 41.)$$

§. 42.

Lehrs. Das Produkt zweier Zahlen wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man nur einen Faktor damit multiplizirt, und den andern beisetzt.

$$\text{d. i. } (A \,.\, B) \times C = AC \times B$$
$$= BC \times A.$$

Bew. $(A \,.\, B) \times C = A \,.\, B \,.\, C$

$$= A \,.\, C \,.\, B, \quad (\S.\ 40,\ \text{No. } 4.)$$
$$= (A \,.\, C) \times B.$$

Eben so wird $(A \,.\, B) \times C = A \,.\, B \,.\, C$

$$= B \,.\, A \,.\, C$$
$$= B \,.\, C \,.\, A = (B \,.\, C) \times A.$$

Z. B. $(4 \times 3) \times 2 = 8 \times 3 = 4 \times 6.$

Folg. 1) Eine Zahl wird mit einem Produkte multiplizirt, wenn man sie nur mit einem Faktor dieses Produktes multiplizirt.

2) Ein Produkt wird mit einem Produkte multiplizirt, wenn man mit jedem Faktor des einen Produkts nur einen Faktor des andern multiplizirt.

§. 43.

Aufg. Einfache Zahlenausdrücke zu multipliziren.

Aufl. und Bew. 1) Die Zeichen bestimme man nach §. 35.

2) Die Coeffizienten multiplizire man nach den Regeln der Multiplikation mit Ziffern, (§. 42. Folg. 1 und 2) und

3) Die Buchstaben schreibe man in alphabetischer Ordnung nebeneinander. (§. 33.)

Kömmt der nämliche Buchstabe mehrmals als Faktor vor, so macht man von der Abkürzung durch Hilfe der Exponenten Gebrauch.

Beispiele.

1) $4m \times 3 = 12m$;

2) $4m \times 3n = 12mn$;

3) $5ab \times 8cde \times 4mn = (5ab \times 8cde) \times 4mn$
$= 5ab\,4mn \times 8cde$
$= 160\ abcde\ mn.$

4) $aa \times ab = aaab$
$= a^3b$;

5) $3ab^2 \times 7a^2b^3 = 21a^3b^5$.
denn $b^2 \times b^3 = bb \times bbb$
$= bb\,bbb = b^5$ u. s. w.

§. 44.

Aufg. Zusammengesetzte Ausdrücke zu multipliziren.

Aufl. Ist der eine Faktor einfach, so multiplizire man mit demselben alle Theile des anderen zusammengesetzten Faktors nach den Regeln des §. 43, und setze die einzelnen Produkte nebeneinander.

Sind beide Faktoren mehrtheilig, so multiplizire man jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des andern Faktors nach denselben Regeln, und setze die einzelnen Produkte nebeneinander.

Sind unter den einzelnen Produkten gleichartige

Ausdrücke, so können sie nach den Regeln der Addition für allgemeine Zahlen behandelt, und dadurch abgekürzt werden.

Bew. B — C stellt jeden aus positiven und negativen Gliedern zusammengesetzten Ausdruck dar;

daher wird $(B - C)\,A =$ oder $A\,(B - C) =$ $\left\{ AB - AC. \right.$ (§. 41.)

Eben so wird nach §. 41.

$$(B - C).\,(A - D) = B\,(A - D) - C\,(A - D)$$
$$= B\,A - B\,D - C\,A + C\,D$$

(§. 35.)

Beispiele.

1) $a + 2\,b - 3\,c$
$\underline{a - 2\,b + 3\,c}$
$a^2 + 2ab - 3ac - 4b^2 + 6bc - 9c^2$
$\underline{\quad - 2ab + 3ac \qquad\qquad + 6bc}$
Produkt: $a^2 - 4b^2 - 9c^2 + 12bc$;

2) $(x + a)\,(x + a) = x^2 + 2\,a\,x + a^2$;

3) $(x - a)\,(x + a) = x^2 - a^2$;

4) $\{a^3 + 2a^2\,b + 2\,ab^2 + b^3\}$
$\{a^3 - 2a^2\,b + 2\,ab^2 + b^3\}$
$= a^6 - b^6$;

5) $(x^2 + 3\,x - 7)\,(x + 5) =$
$x^3 + 8\,x^2 + 8\,x - 35.$

D. Division.

§. 45.

Erklär. 1) Eine Zahl A durch eine andere D dividiren oder theilen, heißt eine solche Zahl Q suchen, welche mit der letzteren D multiplizirt, die erstere A als Produkt wieder zum Vorscheine bringt.

2) Die Zahl A, welche getheilt werden soll, heißt Dividend; die Zahl D, durch welche getheilt werden soll, Divisor oder Theiler; und die gesuchte Zahl Q Quotient.

3) Das Zeichen der Division ist (:);

z. B. $A : D = Q$.

Zusammengesetzte Divisoren oder Dividende werden eingeklammert.

Folg. 1) Ein Produkt, durch den einen seiner Faktoren dividirt, gibt den andern zum Quotienten, weil der Quotient mit dem Divisor multiplizirt, den Dividend zum Produkt geben muß. (Probe für die Multiplikation.) Eben so dient die Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor, wodurch der Dividend als Produkt entstehen muß, zur Probe für die Division.

2) Wenn Divisor und Dividend einander gleich sind, so ist der Quotient 1;

denn da $A . 1 = A$ ist, so

wird $A : A = 1$.

Wenn der Dividend größer oder kleiner ist, als der Divisor, so ist auch der Quotient größer oder kleiner als 1.

3) Ist der Divisor 1, so wird der Quotient dem Dividende gleich;

denn, da $A . 1 = A$ ist, so wird

$A : 1 = A$.

Ist der Divisor größer oder kleiner als 1, so wird der Quotient kleiner oder größer, als der Dividend.

4) Ist der Dividend Null, so muß auch der Quotient Null seyn;

denn, da $A . O = O$ ist, so wird

$O : A = O$.

Ist aber der Divisor Null, so gibt es keinen Quotienten; denn $A : O$ kann keine Zahl B seyn, weil $B . O$ nicht A werden kann, ausser es wäre zugleich A Null.

5) Der nämliche Dividend und Divisor haben nur einen Quotienten; denn gäbe es noch einen anderen, verschiedenen Quotienten, so müßte derselbe doch, mit dem Divisor multiplizirt, den Dividend als Produkt geben, was wegen §. 39., Nro. 2. nicht seyn kann.

6) Eine Zahl mit der nämlichen Zahl multiplizirt und dividirt, bleibt ungeändert;

d. i. $A \cdot B : B = A$.

§. 46.

1) Gleiche Zahlen, durch gleiche dividirt, geben gleiche Quotienten;

d. i. wenn $A = B$ und

$C = D$ ist,

so ist $A : C = B : D$; (wegen §. 45., Nro. 5.)

2) Bei gleichen Dividenden gibt der kleinere Divisor den größeren Quotienten; d. i.

wenn $A = B$ und

$C < D$ ist,

so ist $A : C > B : D$.

Denn es sey $A : C = E$, mithin $A = C E$

und $B : D = F$, mithin $B = D F$.

Wäre nun $E \overline{\overline{<}} F$, so müßte (nach §. 39., Nro. 2. und Nro. 4.)

auch $C E < D F$ oder

$A < B$ seyn. (contra hyp.)

3) Bei gleichen Divisoren gibt der größere Dividend den größeren Quotienten; d. i.

wenn $A > B$ und

$C = D$ ist,

so ist $A : C > B : D$.

Denn es sey wieder, wie in Nro. 2.,

$A : C = E$, also $A = C E$

und $B : D = F$, also $B = D F$.

Wäre nun $E \overline{\overline{<}} F$, so müßte

$C E \overline{\overline{<}} D F$ oder

$A \overline{\overline{<}} B$ seyn. (contra hyp.)

4) Der größere Dividend mit dem kleineren Divisor gibt den größeren Quotienten;

d. i. wenn $A > B$ und
$C < D$ ist,
so ist $A : C > B : D$.

Denn es ist

$A : C > B : C$ (nach Nro. 3.)

und $B : C > B : D$ (nach Nro. 2.); folglich

$A : C > B : D$.

5) Daher wird der Quotient größer, wenn man entweder den Dividend oder den Divisor vermindert; und der Quotient wird kleiner, wenn man entweder den Dividend vermindert, oder den Divisor vermehrt.

§. 47.

Lehrs. Der Quotient erhält das Zeichen + oder —, je nachdem Dividend und Divisor gleiche oder ungleiche Zeichen haben; d. i.

Dividend	+	—	—	+
Divisor	+	—	+	—
Quotient	+	+	—	—

Bew. Denn jedesmal muß der Quotient, mit dem Divisor multiplizirt, den Dividend geben; es sey nun $A : B = Q$.

Dann ist $+A : +B = +Q$;
denn nur $+Q \cdot +B = +A$.
Ferner $-A : -B = +Q$.
denn nur $+Q \cdot -B = -A$.
Ferner $-A : +B = -Q$;
denn nur $-Q \cdot +B = -A$.
Endlich $+A : -B = -Q$;
denn nur $-Q : -B = +A$.

§. 48.

Lehrs. I. Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, wenn man nur einen Faktor dividirt, und den anderen, oder die anderen dem Quotienten beisetzt; d. i.

$$A B : C = (A : C) B$$
$$= (B : C) A.$$

Bew. Es sey $A : C = D$,

so wird $A = C D$, und

$$A B = B C D$$
$$= D B C, \text{ folglich}$$
$$A B : C = D B$$
$$= (A : C) B.$$

Eben so wird man auch $A B : C = (B : C) A$ erhalten.

Dasselbe gilt auch, wenn ein Produkt mehrerer Faktoren zu dividiren ist, weil B aus mehreren Faktoren bestehen kann.

Z. B. $(8 \times 6) : 2 = 4 \times 6,$
$$= 8 \times 3.$$

II. Eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, wenn man sie durch jeden Faktor dividirt; d. i.

$$A : B C = (A : B) : C$$

Bew. Es sey $A : B = D$ und $D : C = E$,

so wird $D = C E$ und

$$A = B D$$
$$= B C E; \text{ folglich}$$
$$A : B C = E$$
$$= D : C$$
$$= (A : B) : C.$$

Ist der Divisor ein Produkt von mehr als zwei Faktoren, so dividirt man durch einen Faktor nach dem andern;

d. i. $A : B C D = (A : B) : C D$
$$= \{(A : B) : C\} : D \text{ u. s. w.}$$

Z. B. $24 : (4 \times 3) = (24 : 4) : 3$
$$= 6 : 3$$
$$= 2$$

oder $48 : (2 \times 3 \times 4) = 48 : 2 : 3 : 4$
$= 24 : 3 : 4$
$= 8 : 4$
$= 2.$

Folg. 1) Ein Produkt wird durch ein anderes Produkt dividirt, wenn man durch jeden Faktor des Divisors einen Faktor des Dividends dividirt;

d. i. $AB : CD = (A : C) . (B : D)$

z. B. $(6 \times 8) : (3 \times 4) = (6 : 3) . (8 : 4)$,
$= 2 \times 2$,
$= 4.$

2) Eine Zahl kann durch mehrere andere in jeder Ordnung dividirt werden; denn es ist so viel, als ob der Dividend durch das Produkt aller Divisoren getheilt würde, und dieses Produkt bleibt in jeder Ordnung einerlei;

z. B. $48 : (2 \times 3 \times 4) = 48 : (4 \times 3 \times 2.)$

§. 49.

Lehrs. Ein zusammengesetzter Ausdruck wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jedes Glied des Dividends durch den Divisor dividirt, mit Rücksicht auf die Regel für die Zeichen; d. i.

$$(A \pm B \pm C \pm \ldots) : D = A : D \pm B : D \pm C : D \pm \ldots$$

Bew. Denn es ist

$$(A : D \pm B : D \pm C : D \pm \ldots) . D = A \pm B \pm C \pm \ldots$$

(nach §. 44. und §. 45.)

§. 50.

Lehrs. I.) Ein Quotient wird mit einer ganzen Zahl multiplizirt, wenn man mit ihr entweder den Dividend multiplizirt, oder den Divisor dividirt; und

II.) ein Quotient wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit ihr entweder den Dividend dividirt, oder den Divisor multiplizirt; d. i.

I.) $(A : B)\,C = A\,C : B$
$= A : (B : C)$

II.) $(A : B) : C = (A : C) : B$
$= A : B\,C.$

Bew. I.) Nach §. 48. I. ist

$$A\,C : B = (A : B)\,C.$$

Ferner sey $A : (B : C) = D$

$$A = (B : C)\,D$$
$$= D\,B : C, \text{ mithin}$$
$$A\,C = D\,B$$
$$A\,C : B = D \text{ oder}$$
$$(A : B)\,C = A : (B : C).$$

II.) Aus §. 48. Folg. 2. und §. 48. II.

Z. B. $(12 : 6) \times 3 = 36 : 6$
$= 12 : (6 : 3);$
$(48 : 6) : 2 = 48 : 6 : 2$
$= 48 : 12.$

§. 51.

Lehrs. I. Ein Quotient wird durch einen Quotienten multiplizirt, wenn man das Produkt der Dividende durch das Produkt der Divisoren dividirt; d. i.

$$(A : B)\,(C : D) = A\,C : B\,D.$$

Bew. Es ist $(A : B)(C : D) = A(C : D) : B$; (§. 48. I.)
$= (A\,C : D) : B$; (§. 50. I.)
$= A\,C : B\,D.$ (50. II.)

Z. B. $(24 : 6)\,(12 : 3) = (24 \times 12) : (6 \times 3.)$

II. Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man sie mit dem Divisor multiplizirt, und durch den Dividend dividirt; d. i.

$$A : (B : C) = A\,C : B$$

Bew. Nach §. 50. I. ist

$$A : (B : C) = (A : B)\,C;$$ daher auch

$$A : (B : C) = AC : B;$$

z. B. $48 : (12 : 2) = 96 : 12.$

III. Ein Quotient wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man den Dividend durch den umgekehrten Divisor multiplizirt; d. i.

$$(A : B) : (C : D) = (A : B)\,(D : C).$$

Bew. Denn $(A : B) : (C : D) = (A : B)\,D : C$ (Nro. II.)

$$= (A\,D : B) : C$$

$$= A\,D : B\,C \quad (50.\ \text{II.})$$

$$= (A : B)\,(D : C).$$

(§. 48. Folg. 1.)

Z. B. $(12 : 3) : (4 : 2) = (12 : 3)\,(2 : 4).$

IV. Wird Dividend und Divisor durch die nämliche Zahl multiplizirt oder dividirt, so bleibt der Quotient unverändert; d. i.

$$A : B = A\,C : B\,C$$

$$= (A : C) : (B : C)$$

Bew. Denn es ist

$A\,C : B\,C = (A\,C : B) : C$ (§. 48. II.)

$= (A : B)\,C : C$ (§. 50. I.)

$= A : B.$

Ferner $(A : C) : (B : C) = (A : C)\,(C : B)$ (Nro. III.)

$= A\,C : B\,C$ (Nro. I.)

$= A : B.$

Z. B. $12 : 6 = 24 : 12,$

$= 6 : 3.$

§. 52.

Aufg. Allgemeine Zahlenausdrücke zu dividiren.

I. Einfache Ausdrücke.

Aufl. und Bew. Die Zeichen bestimme man nach §. 47.; die nämlichen Faktoren im Dividende und im Divisor streiche man aus; (wegen §. 45., Folg. 2. und §. 48.)

Beispiele:

1) $ab : a = b$;

2) $6a : 3 = 2a$;

3) $6ab : 3a = 2b$;

4) $48ab : ab = 48$.

Kömmt hiebei der nämliche Buchstabe mehrmals als Faktor vor, so kann man mit Hilfe der Exponenten abkürzen; d. i.

5) $aaabb : ab = aab$,

kürzer $a^3b^2 : ab = a^2b$;

6) $6a^7b^3 : 2a^4b^2 = 2a^3b$.

Kommen im Dividende und Divisor verschiedene Buchstaben vor, so werden dieselben in der Form der Division angeschrieben; d. i.

7) $amn : bxy = amn : bxy$;

8) $8am : 2bn = 4am : bn$;

9) $6ab : 3ac = 2b : c$.

Eine andere Art, die Division solcher ungleichartiger Ausdrücke anzuzeigen, wird in der Lehre von den Brüchen angegeben werden.

II.) Zusammengesetzte Ausdrücke.

Wenn der Divisor einfach ist, so verfahre man nach der Regel im §. 49.

Beisp. 1) $8am + 6abm - 12bdm : 2m$
$= 4a + 3ab - 6bd$.

2) $6a^6b^3 - 12a^3bd - 18abd : 6ab$
$= a^5b^2 - 2a^2d - 3d$.

Die ausführliche Lehre von der Multiplikation sowohl, als von der Division zusammengesetzter Ausdrücke kann erst nach der Lehre von den Brüchen und Potenzen gegeben werden; jedoch mag hier noch ein Beispiel stehen:

$$15\,ad - 9\,bd + 15\,cd - 20\,ae + 12\,be - 20\,ce : 3d - 4e$$
$$= 5a - 3b + 5c.$$

$$\begin{array}{llll}
15\,ad & & -20\,ae & \\
- & & + & \\
\hline
-9\,bd & +15\,cd & +12\,be & -20\,ce \\
-9\,bd & & +12\,be & \\
+ & & - & \\
\hline
 & +15\,cd & -20\,ce & \\
 & +15\,cd & -20\,ce & \\
 & - & + & \\
\hline
 & & - &
\end{array}$$

Dritter Abschnitt.

Von der Theilbarkeit der Zahlen.

§. 53.

Erklär. Eine ganze Zahl A heißt durch eine andere B theilbar, wenn auch ihr Quotient eine ganze Zahl n ist.

Die Zahl B, durch welche die Zahl A theilbar ist, nennt man einen Theiler, Faktor, oder auch ein Maß derselben;

z. B. Da 12 : 3 = 4 ist, so ist die Zahl 3 das Maß der Zahl 12.

Folg. 1) Eine Zahl A, welche durch eine andere B theilbar ist, kann, als ein Produkt derselben in eine ganze Zahl, angesehen werden;

d. i. $B \times n = A$;
oder $3 \times 4 = 12$.

2) Jede ganze Zahl ist durch sich selbst, und durch 1 theilbar.

§. 54.

Erklär. Eine ganze Zahl, welche durch keine andere, als durch sich und durch 1 theilbar ist, heißt eine einfache oder eine Primzahl; z. B. die Zahlen 7, 11, 13 u. s. w.

Eine ganze Zahl, welche durch eine oder mehrere andere theilbar ist, heißt eine zusammengesetzte Zahl; z. B. die Zahlen 8, 24, 30 u. s. w.

Folg. Eine jede zusammengesetzte Zahl kann, als ein Produkt von wenigstens zwei ganzen Faktoren, deren keiner 1 ist, betrachtet werden, was bei einer Primzahl nicht der Fall seyn kann.

§. 55.

Erklär. Ein Theiler heißt für mehrere Zahlen gemeinschaftlich, wenn sie alle durch denselben theilbar sind; z. B. für die Zahlen 8, 12 und 24 ist 4 das gemeinschaftliche Maß.

Folg. Eins ist ein gemeinschaftlicher Theiler aller Zahlen; deßwegen pflegt man 1 nicht mit zu begreifen, wenn man nach den gemeinschaftlichen Theilern mehrerer Zahlen fragt.

§. 56.

Erklär. Die Faktoren einer zusammengesetzten Zahl, welche Primzahlen sind, heißen ihre einfachen Faktoren.

Folg. Da 1 der Faktor einer jeden Zahl ist, so wird derselbe gewöhnlich nicht mitbegriffen, wenn von den Faktoren einer Zahl die Rede ist.

§. 57.

Erklär. Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, nennt man Primzahlen unter sich, oder relative Primzahlen; z. B. 4 und 15.

Folg. Man muß relative von den absoluten oder eigentlichen Primzahlen wohl unterscheiden. Mehrere absolute Primzahlen sind immer auch relative Primzahlen, aber nicht umgekehrt; z. B. die Zahlen 4 und 15 sind zwar relative, aber nicht absolute Primzahlen.

§. 58.

Lehrs. Das Produkt mehrerer ganzer Faktoren ist durch das Produkt einiger aus ihnen theilbar.

Bew. Denn der Quotient muß das Produkt aller

übrigen ganzen Faktoren, und daher ebenfalls eine ganze Zahl seyn. (§. 48.)

§. 59.

Lehrs. Keine ganze Zahl kann durch eine größere Zahl, als sie selbst ist, theilbar seyn.

Bew. Denn wenn $A < B$ ist, so ist

$$A : B < 1;$$ folglich

kann $A : B$ keine ganze Zahl seyn.

§. 60.

Lehrs. Jede ganze Zahl A, welche durch eine andere B nicht theilbar ist, kann als die Summe einer durch die letztere theilbaren, und einer kleineren Zahl, als dieselbe, angesehen werden; d. i.

$$A = m B + C,$$

wo $m B$ durch B theilbar, und $C < B$ ist.

Bew. Ist A durch B nicht theilbar, so kann man doch B von A so oft, z. B. m mal, wegnehmen, daß zuletzt eine Zahl C übrig bleibt, die kleiner ist als B, weil durch sie A nicht gänzlich aufgehoben werden kann, indem sonst A durch B theilbar wäre.

A ist also die Summe von allen weggenommenen B, und von C. Die Summe aller weggenommenen B macht aber nach §. 32., Folg. 2. das Produkt $m B$ aus; folglich ist

$$A = m B + C;$$

$$\text{z. B. } 37 = 4 . 9 + 1.$$

Folg. Wird daher eine ganze Zahl durch eine andere getheilt, durch welche sie nicht theilbar ist, so erhält man entweder Null oder eine ganze Zahl, und dazu noch einen Quotienten, dessen Dividend kleiner, als der Divisor, welcher also kleiner als 1 ist;

denn aus $A = m B + C$, wobei $C < B$ ist,

folgt $A : B = (m B + C) : B$

$= m + C : B$

wobei wegen $C < B$, auch $C : B < 1$ ist;

z. B. $37 : 9 = 4 + 1 : 9$.

§. 61.

Erklär. Wird eine ganze Zahl A als die Summe zweier Zahlen $m B + C$ betrachtet, von welchen die eine $m B$ durch eine andere B theilbar, die andere C aber kleiner ist als diese, so nennt man diesen kleineren Theil C den Rest bei der Division der ersteren Zahl A durch die letztere B.

Folg. 1. Ist eine ganze Zahl durch eine andere theilbar, so ist der Rest Null.

2) Man kann daher jede ganze Zahl, in Bezug auf eine andere B, durch $m B + C$ darstellen, wobei m entweder Null, oder eine ganze Zahl, C aber entweder Null, oder doch kleiner als B ist;

z. B. $29 = 4 . 6 + 5$, wobei $C < B$
oder $5 < 6$ ist.
$24 = 4 . 6$;
also $C = 0$.
$5 = 0 . 6 + 5$;
also $m = 0$.

Allgemeine Sätze über die Theilbarkeit ganzer Zahlen.

Lehrs.

§. 62.

~~Erster Satz~~. Ein Produkt ist durch jede Zahl theilbar, durch welche nur ein Faktor desselben theilbar ist.

Bew. Weil ein Produkt schon getheilt wird, wenn man nur einen Faktor theilt. (§. 48.)

§. 63.

Lehrs. Sind Dividend A und Divisor B durch die nämliche Zahl m theilbar, so muß auch ihr Rest R durch dieselbe theilbar seyn.

Bew. Ist C der erhaltene ganze Theil des Quotienten, so ist (§. 61)

$$A = B C + R, \text{ folglich}$$

$$A - B C = R.$$

Da nun B durch m theilbar ist, so muß auch B C dadurch theilbar seyn; (§. 62.) eben so, da A durch m theilbar ist, ist auch

$A - B C$ d. i. R, oder der Rest durch m theilbar.

§. 64.

Lehrs. Sind Divisor B und Rest R durch einerlei Zahl m theilbar, so muß auch der Dividend A durch dieselbe theilbar seyn.

Bew. Es wird wieder, wie im vorhergehenden §,

$$A = B C + R; \text{ und}$$

$$A : m = (B C + R) : m.$$

Da nun B und R durch m theilbar sind, so muß auch B C durch m theilbar seyn (§. 62); folglich sind $B C : m$, und $R : m$ ganze Zahlen, mithin ist auch ihre Summe, d. i. $A : m$ eine ganze Zahl; d. h. auch A ist durch m theilbar.

§. 65.

Erklär. Die ganzen Zahlen, die durch 2 theilbar sind, nennt man gerade, die nicht durch 2 theilbar sind, ungerade Zahlen.

Folg. 1. Jede gerade Zahl läßt sich durch 2n, jede ungerade aber durch $2n + 1$ darstellen, wenn n eine ganze Zahl bedeutet.

2) Die Summe sowohl, als der Unterschied zweier oder mehrerer geraden Zahlen ist ebenfalls gerade.

3) Die Summe sowohl, als der Unterschied zweier ungeraden Zahlen ist gerade.

4) Die Summe sowohl, als der Unterschied einer geraden und einer ungeraden Zahl ist jederzeit ungerade.

5) Das Produkt zweier gerader, oder auch einer geraden in eine ungerade Zahl, ist gerade.

6) Das Produkt zweier ungeraden Zahlen ist wieder ungerade.

7) Ein Produkt mehrerer ganzer Zahlen ist gerade, wenn nur ein Faktor gerade ist; wegen Nro. 5.

§. 66.

Lehrs. Das Produkt mehrerer ganzer Zahlen, deren keine kleiner, als 2 ist, muß größer seyn, als ihre Anzahl n.

Bew. Es sey $A \geqq 2$, und

$B \geqq 2$; mithin

$AB \geqq 4$ folglich

$AB > 2$;

es sey ferner $C \geqq 2$, daher

$ABC > 4$, um so mehr

$ABC > 3$.

Wenn dieß nun überhaupt für ein Produkt von n Faktoren gilt, so muß es auch für ein Produkt von $n + 1$ Faktoren gelten; nämlich

es sey $ABC \ldots P > n$.

Ist nun $Q \geqq 2$, so folgt

$ABC \ldots PQ > 2n$;

da n nicht kleiner, als 2 seyn kann,

mithin $2n = n + n > n + 1$ ist,

so ist $ABC \ldots PQ > n + 1$.

Setzt man nun $n = 4$, so gilt der Satz auch für $n + 1$, oder für 5;

setzt man $n = 5$, so auch für 6, u. s. w.

Dadurch ist nunmehr der Beweis vollständig hergestellt. (Man vergl. §. 11.)

Folg. Eine Zahl kann nicht so viele ganze Faktoren, die größer, als 1 sind, haben, als sie selbst Einser hat; denn es ist $A . B . C \ldots . > n$;

und $A . B . C \ldots . = (1 + 1 + \ldots .) (1 + 1 + \ldots .)$

folglich $(1 + 1 + \ldots .) (1 + 1 + \ldots .) > n$.

§. 67.

Lehrs. Jede ganze Zahl, welche nicht selbst eine Primzahl ist, kann als ein Produkt aus lauter Primzahlen betrachtet werden.

Bew. Denn jede zusammengesetzte Zahl kann nach §. 54. Folg. 1, als ein Produkt von zwei ganzen Faktoren betrachtet werden. Jeder dieser Faktoren, welcher noch eine zusammengesetzte Zahl ist, kann wieder in zwei ganze Faktoren zerlegt gedacht werden. Auf solche Art kann man so lange fortfahren, die Zahl der Faktoren zu vermehren, als noch ein zusammengesetzter Faktor vorhanden ist. Da aber die Anzahl der Faktoren nach §. 66. Folg. nicht immer fortwachsen kann, so folgt, daß man endlich auf Faktoren kommen müsse, von welchen keiner eine zusammengesetzte Zahl ist.

§. 68.

Aufg. Die einfachen Faktoren einer zusammengesetzten Zahl zu finden.

Aufl. und Bew. Um die einfachen Faktoren einer Zahl zu finden, darf man, (nach §. 67.) sie nur zuerst in zwei Faktoren zerlegen, jeden derselben, wenn er nicht ohnehin schon eine Primzahl ist, wieder zerlegen, und so fortfahren, bis man lauter einfache Faktoren erhält.

Am bequemsten und sichersten jedoch wird diese Zerlegung geschehen, wenn man die gegebene Zahl durch die kleinsten Primzahlen nach der Ordnung zu theilen versucht.

Hat man auf diese Art einen Theiler der Zahl gefunden, so braucht man nur noch den Quotienten weiter zu zerlegen, und daher auf gleiche Art zu behandeln, wobei man die Primzahlen, welche kleiner, als der gefundene Theiler sind, nicht wieder zu versuchen braucht, weil dieselben ohnehin gewiß keine Theiler seyn können. Erhält man auf diese Art endlich einen Quotienten, der selbst eine Primzahl ist, so ist die Zerlegung vollständig, indem die gegebene Zahl das Produkt aller gefundenen Theiler in den letzten Quotienten ist.

Beisp. 1) Es seyen die einfachen Faktoren von 15015 zu finden.

15015 : 3 = 5005.
5005 : 5 = 1001; dann
1001 : 7 = 143; dann
143 : 13 = 11; wobei der Quotient 11 selbst eine Primzahl ist.

Mithin hat man 15015 = 3. 5. 7. 11. 13.

§. 69.

Lehrs. Ein gemeinschaftlicher Theiler mehrerer Zahlen kann nicht größer seyn, als die kleinste aus ihnen.

Bew. Weil die kleinste gegebene Zahl durch keine größere, als sie selbst ist, theilbar seyn kann. (§. 59)

Folg. Sobald daher die nämlichen Zahlen mehrere gemeinschaftliche Theiler haben, können diese nicht immer größer werden, sondern es muß darunter einen größten geben.

§. 70.

Erklär. Eine Zahl, welche zwei oder mehrere Zahlen so theilt, daß die Quotienten Primzahlen unter sich sind, heißt das größte gemeinschaftliche Maß, oder der größte gemeinschaftliche Theiler dieser Zahlen.

§. 71.

Aufg. Den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden.

Aufl. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; bleibt kein Rest, so ist die kleinere Zahl selbst der größte gemeinschaftliche Theiler. Bleibt aber ein Rest, so dividirt man die kleinere Zahl durch diesen Rest der ersten Division, dann diesen ersten Rest durch den zweiten, den zweiten durch den dritten, u. s. w. bis man zu einer Division ohne Rest kömmt, wo dann der letzte Divisor der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler ist;

z. B. Man suche den größten gemeinschaftlichen Theiler von 1309 und 517.

Man schreibt die Reste unmittelbar nebeneinander, den jedesmaligen Quotienten aber darüber; d. i.

2 1 1 7 3
1309 : 517 : 275 : 242 : 33 : 11

Folg. 1) Wenn der letzte Divisor 1 ist, so sind die zwei gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich; und umgekehrt, wenn zwei Zahlen Primzahlen unter sich sind, so muß der letzte Divisor 1 seyn.

1 3 6 1 9 3
Beisp. 887 : 673 : 214 : 31 : 28 : 3 : 1.

Folg. 2) Soll man den größten gemeinschaftlichen Theiler von mehr, als zwei Zahlen suchen, so suche man zuerst den größten gemeinschaftlichen Theiler T für die ersten zwei gegebenen Zahlen; dann suche man wieder den größten gemeinschaftlichen Theiler D für T und die dritte gegebene Zahl u. s. f. bis zur letzten gegebenen Zahl. Der zuletzt gefundene Theiler ist zugleich der größte gemeinschaftliche Theiler für alle gegebenen Zahlen.

Beisp. Der größte gemeinschaftliche Theiler für

300, 750, 1080, 1206

ist 6.

§. 72.

Aufg. Die kleinste, durch zwei oder mehrere gegebene Zahlen theilbare Zahl zu suchen.

Aufl. 1) Bei zwei Zahlen.

Man suche ihren größten gemeinschaftlichen Theiler; dividire durch denselben die eine der zwei Zahlen, und multiplizire den erhaltenen Quotienten mit der anderen.

Das Produkt ist die gesuchte Zahl.

Beisp. Die kleinste, durch 684 und 252 theilbare Zahl ist

$$19 \cdot 252 = 4788.$$

Bew. Es sey T der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B, und $A : T = C$.

Die kleinste durch A und B theilbare Zahl muß nicht nur alle Faktoren von B, sondern auch überdieß jene Faktoren von A enthalten, welche in B entweder gar nicht, oder nicht so oft vorkommen. Die letzteren Faktoren aber sind in C enthalten, mithin ist die kleinste, durch A und B theilbare Zahl, das Produkt von B und C.

2) Bei mehr als zwei Zahlen, sucht man zuerst die kleinste Zahl a, welche durch zwei der gegebenen Zahlen theilbar ist, dann die kleinste Zahl b, welche durch a und durch die dritte Zahl theilbar ist, u. s. f. bis zur letzten gegebenen Zahl.

Vierter Abschnitt.

Von den Brüchen.

§. 73.

Erklär. 1) Eine Zahl, welche aus lauter aliquoten Theilen von Eins bestehend gedacht werden kann, heißt ein Bruch.

2) Ein Bruch erfordert zu seiner Bezeichnung zwei Zahlen; die eine Zahl muß angeben, aus wie vielen aliquoten Theilen die Einheit bestehend gedacht wird, (Nenner); die andere zeigt an, wie oft dieser aliquote Theil im Bruche enthalten sey, d. h. sie gibt die Anzahl der aliquoten Theile an, (Zähler).

Der Bruch $\frac{3}{4}$ zeigt an, daß das Ganze oder die Einheit in 4 Theile getheilt wurde, und daß von diesen 4 Theilen 3 gegeben sind.

§. 74.

Lehrs. Der nte Theil von 1 ist der Quotient von 1 getheilt durch n;

$$\text{d. i. } \frac{1}{n} = 1 : n.$$

Bew. Denn der nte Theil von 1 muß n mal genommen, d. i. mit n multiplizirt, die Zahl 1 geben, oder es ist

$$\frac{1}{n} \cdot n = 1, \text{ folglich}$$

$$1 : n = \frac{1}{n}.$$

Folg. Jeder Bruch ist ein Quotient, welchen der Zähler (als Dividend) durch den Nenner (als Divisor) dividirt, gibt;

denn es ist $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots\ldots$, oder

$$\frac{a}{b} = 1 : b + 1 : b + 1 : b + \ldots\ldots$$
$$= (1 + 1 + 1 + \ldots\ldots) : b$$
$$= a : b.$$

Daher läßt sich jeder Bruch als eine Division betrachten, und jede Division läßt sich durch einen Bruch darstellen, es ist also einerlei, ob man zwischen Zähler und Nenner das Divisionszeichen oder das Bruchzeichen schreibt.

Daher müssen alle Sätze, welche von den Quotienten erwiesen worden sind, auch von den Brüchen gelten, wenn man Zähler anstatt Dividend, und Nenner anstatt Divisor setzt; d. i.

I. Bei Brüchen mit gleichen Zählern ist jener der größere, welcher den kleineren Nenner hat; d. i.

$$\frac{4}{5} > \frac{4}{7}. \text{ (§. 46. No. 2.)}$$

Beide Brüche bestehen zwar aus gleich vielen Theilen, aber im ersteren Bruche werden die Theile größer, weil man das Ganze in wenigere Theile theilt. Daher bringt man jene Brüche, von denen man bestimmen soll, welcher der größte sey, auf gleiche Nenner.

II. Bei Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist jener mit dem größeren Zähler auch der größere am Werthe; (§. 46. No. 3.)

Z. B. $\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$; in beiden Brüchen ist die Einheit

in gleich viele Theile getheilt; im ersteren Bruche aber sind mehr solche gleiche Theile vorhanden, als im anderen.

III. Ein Bruch ist um so größer, je größer sein Zähler und je kleiner sein Nenner ist. (§. 46. Nro. 4.)

IV. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner einander gleich sind, ist der Einheit gleich; (§. 45. Folg. 2.)

d. i. $\frac{4}{4} = 1.$

Ein Bruch, dessen Nenner gleich 1 ist, ist dem Zähler gleich; d. i.

$$\frac{A}{1} = A$$

folglich läßt sich jede ganze Zahl bruchartig ausdrücken.

V. Ein Bruch, dessen Zähler größer oder kleiner ist, als der Nenner, ist größer oder kleiner als 1; (§. 46. Folg. 2.) d. i.

$$\frac{3}{4} < 1; \quad \frac{4}{3} > 1.$$

VI. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplizirt, wenn man damit entweder den Zähler multiplizirt, oder den Nenner dividirt; (§. 50. I.) d. i.

$$\frac{A}{B} \cdot C = \frac{AC}{B} = \frac{A}{B:C}$$

VII. Ein Bruch wird mit einem Bruche multiplizirt, wenn man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplizirt; (§. 51. I.)

d. i. $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$

VIII. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man damit entweder den Zähler dividirt, oder den Nenner multiplizirt; (§. 50. II.)

d. i. $\frac{A}{B} : C = \frac{A : C}{B} = \frac{A}{BC}$

IX. Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch divi-

dirt, wenn man sie mit dem Nenner des Bruches multiplizirt, und mit dem Zähler desselben dividirt; (§. 51. II.)

$$\text{d. i.}\quad A : \frac{B}{C} = \frac{AC}{B}$$

X. Ein Bruch wird mit einem Bruche dividirt, wenn man den ersteren mit dem umgekehrten letzteren multiplizirt; (§. 51. III.) d. i.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}.$$

XI. Wird Zähler und Nenner eines Bruches durch die nämliche Zahl multiplizirt oder dividirt, so bleibt der Werth des Bruches ungeändert; nur sein Ausdruck oder seine Form wird geändert; (§. 51. IV.)

$$\text{d. i.}\quad \frac{A}{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{A : C}{B : C}.$$

§. 75.

Lehrs. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind, kann nicht durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden.

Bew. Es sey $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, wenn es möglich ist; ferner A und B Primzahlen, und $D < B$.

Hieraus folgt $\frac{AD}{B} = C$, mithin müßte A D durch B theilbar seyn, da aber in A kein Faktor von B vorkommen kann, so müßte D durch B theilbar seyn, was wieder nicht seyn kann, wegen §. 59.

§. 76.

Aufg. Einen Bruch, dessen Zähler und Nenner einen oder mehrere gemeinschaftliche Theiler (Faktoren) haben, durch kleinere Zahlen auszudrücken.

Aufl. und Bew. Man dividire Zähler und Nenner durch diese gemeinschaftlichen Theiler; der Werth des Bruches bleibt ungeändert. (§. 74. XI.)

Folg. 1) Dividirt man Zähler und Nenner durch **ihren** *größten* gemeinschaftlichen Theiler, so wird der Bruch durch *die kleinsten* Zahlen ausgedrückt. (§§. 75., 70. und 74. XI.)

2) Man darf daher, um einen Bruch durch kleinere Zahlen auszudrücken, nur die dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Faktoren wegstreichen.

Beispiele. $\frac{5}{15} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3}$.

2) $\frac{48\ a^3\ b^5\ c^2\ d}{64\ a^3\ b^3\ c^4\ e} = \frac{3\ b^2\ d}{4\ c^2\ e}$.

3) $\frac{6a^4 - 3a^2\ bc + 12a^2\ c^2}{9a^2b - 15\ a^2\ c + 24a^3} = \frac{2a^2 - bc + 4c^2}{3b - 5c + 8a}$

§. 77.

Aufg. Einen Bruch auf einen anderen Nenner zu bringen, der durch den vorigen Nenner theilbar ist.

Aufl. Man theile den neuen durch den vorigen Nenner, und mache das Produkt dieses Quotienten in den vorigen Zähler zum neuen Zähler.

Bew. Es sey $\frac{A}{B}$ auf den Nenner C zu bringen; und $C : B = D$, also $B\ D = C$, so ist

$$\frac{A}{B} = \frac{A\ D}{B\ D} = \frac{A\ D}{C}.$$

Beisp. $\frac{3}{8}$ auf den Nenner 16 gebracht, wird $\frac{6}{16}$.

§. 78.

Aufg. Mehrere Brüche auf gleiche Nenner zu bringen.

I. Aufl. Man multiplizire jeden Zähler mit allen Nennern der übrigen Brüche, nur mit dem seinigen nicht, und nehme die erhaltenen Produkte der Ordnung nach für die neuen Zähler; das Produkt aller Nenner gibt den gemeinschaftlichen Nenner.

Bew. Hiedurch wird bei jedem Bruche Zähler und

Nenner mit der nämlichen Zahl, d. i. mit dem Produkte aller übrigen Nenner multiplizirt. (§. 74. XI.)

II. Aufl. Man suche eine Zahl, die durch alle Nenner theilbar ist, und bringe nach §. 77. jeden Bruch auf diesen Nenner.

Beisp. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ wird $\frac{20}{60}, \frac{15}{60}, \frac{12}{60}$.

§. 79.

Aufg. Mehrere Brüche auf den kleinsten Nenner zu bringen.

Aufl. und Bew. Man suche nach §. 72. die kleinste, durch alle Nenner theilbare Zahl, und bringe nach §. 77. jeden Bruch auf diesen Nenner.

Beisp. $\frac{3}{8}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9}, \frac{4}{5}$ wird

$$\frac{135, 210, 300, 80, 288}{360}.$$

§. 80.

Erklär. Ist der Dividend durch den Divisor nicht theilbar (§§. 60. und 61.), so schreibt man zum Quotienten den noch zu theilenden Rest in Gestalt eines Bruches;

z. B. $37 : 5 = 7 + \frac{2}{5} = 7\frac{2}{5}$.

Zahlenausdrücke von der Form $a + \frac{m}{n}$ heißen gemischte Zahlen.

§. 81.

Eintheilungen.

Man theilt die Brüche ein

1) in gemeine und in besondere;

je nachdem sie jede beliebige Zahl, oder nur gewisse Zahlen zum Nenner haben können;

2) in eigentliche oder ächte, und
in uneigentliche oder unächte;

bei den ersteren ist der Zähler kleiner, als der Nenner, bei den anderen gleich dem Nenner, oder kleiner.

3) in regelmäßige und
in unregelmäßige, oder gebrochene;
je nachdem Zähler und Nenner ganze Zahlen sind oder nicht;

z. B. $\frac{2 + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}}$ ist ein unregelmäßiger Bruch.

§. 82.

Folg. 1. Jeder ächte Bruch ist kleiner als 1; jeder unächte gleich 1, oder größer als 1. (§. 74. IV. V.)

2) Man findet die Ganzen eines unächten Bruches, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt.

Ist der Zähler durch den Nenner theilbar, so erhält man nur Ganze; ist er aber nicht durch den Nenner theilbar, so erhält man gemischte Zahlen;

$$\text{z. B. } \frac{14}{2} = 7; \text{ und } \frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}.$$

Umgekehrt kann auch jede ganze Zahl als ein Bruch mit einem beliebigen Nenner dargestellt werden, wenn man nur das Produkt aus der ganzen Zahl in den Nenner zum Zähler nimmt;

$$\text{z. B. } 7 = \frac{14}{2} = \frac{48}{4} = \ldots$$

und auch jede gemischte Zahl kann wieder in einen unächten Bruch verwandelt werden;

$$\text{z. B. } 7\frac{2}{5} = \frac{37}{5}.$$

§. 83.

Aufg. Einen unregelmäßigen Bruch in einen regelmäßigen zu verwandeln.

Aufl. Enthält der Zähler oder der Nenner nur einen Bruch, so wird dieser dadurch weggeschafft, daß man mit seinem Nenner sowohl den Zähler als auch den Nenner des unregelmäßigen Bruches multiplizirt.

Bew. Dadurch muß der einzelne Bruch verschwinden; denn da er mit seinem Nenner multiplizirt wird, so muß sein Zähler als Produkt erscheinen, ohne daß der Werth des ganzen Bruches geändert würde. (§. 74. XI.)

Bei mehreren Brüchen im Zähler oder Nenner wird dieses Verfahren für jeden wiederholt.

Beisp. 1) $\frac{4-\frac{2}{3}}{6} = \frac{\left(4-\frac{2}{3}\right)3}{6 \cdot 3} = \frac{5}{6}$;

2) $\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{4}{16}} = \frac{88}{855}$.

A. Addition der Brüche.

§. 84.

Aufg. Brüche zu addiren.

Aufl. I.) Haben sie gleiche Nenner, so addire man ihre Zähler, und setze unter die Summe derselben den unveränderten Nenner.

II.) Haben sie aber ungleiche Nenner, so muß man sie zuerst auf gleiche Nenner bringen, (§. 78. und 79.) und dann verfährt man, wie in Nro. I.

Bew. $\frac{A}{N} + \frac{B}{N} + \ldots = (A:N) + (B:N) + \ldots$

$$= (A + B + \ldots) : N$$

$$= \frac{A + B + \ldots}{N}.$$

Beispiele:

1) $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

2) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$

3) $\frac{2a}{m} + \frac{3b}{m} = \frac{2a + 3b}{m}$.

Sind mit den Brüchen auch Ganze gegeben, so addire man die Ganzen für sich, und dann auch die Brüche;

z. B. $3\frac{1}{2} + 4\frac{2}{3} = 8\frac{1}{6}$

§. 85.

Aufg. Brüche von einander zu subtrahiren.

Aufl. I.) Haben sie gleiche Nenner, so ziehe man den Zähler des Subtrahends vom Zähler des Minuends ab, und setze unter den Rest den unveränderten Nenner.

II. Haben sie ungleiche Nenner, so bringe man sie erst auf gleiche Nenner.

Bew. $\frac{A}{N} - \frac{B}{N} = (A:N) - (B:N)$

$= (A - B) : N$

$= \frac{A - B}{N.}$

Beispiele:

1) $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

2) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15 - 8}{20} = \frac{7}{20}$

3) $\frac{2a}{m} - \frac{3b}{m} = \frac{2a - 3b}{m}$

Kommen Ganze unter den Brüchen vor, so bringe man sie auf die Form von unächten Brüchen, nach §. 82. Folg. 2. oder §. 74. IV.

§. 86.

Aufg. Gegebene Brüche miteinander zu multipliziren.

Aufl. und Bew. Nach §. 74. VII.

Z. B. 1) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

2) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

$$3)\ \frac{2\,a\,a}{3\,b\,b\,b} \times \frac{6\,b\,b\,b\,b}{5\,a\,a\,a} = \left\{ \frac{4\,b}{5\,a}; \right.$$

oder kürzer $$\frac{2\,a^2}{3\,b^3} \times \frac{6\,b^4}{5\,a^2} =$$

$$4)\ \left(\frac{a+b}{c+d.}\right)\left(\frac{a-b}{c-d}\right) = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$$

Ganze Zahlen werden mit Brüchen, und Brüche mit ganzen Zahlen multiplizirt nach §. 74. VI.

Folg. Bei der Multiplikation zweier Brüche ist das Produkt kleiner, als jeder der beiden Faktoren;

denn ist ein Faktor kleiner als 1, so wird das Produkt kleiner als der andere Faktor; d. i.

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}, \text{ und } \frac{3}{8} < \frac{1}{2} \text{ und}$$

$$\frac{3}{8} < \frac{3}{4}.$$

Aus demselben Grunde wird das Produkt kleiner als der Multiplikand, wenn dieser eine ganze Zahl ist; d. i.

$$2 \times \frac{1}{2} = 1, \text{ und } 1 < 2.$$

Das Produkt aber wird größer als der Multiplikand, wenn der Multiplikator eine ganze Zahl ist; denn ist ein Faktor größer als 1, so ist das Produkt größer als der andere; d. i.

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1, \text{ und } 1 > \frac{1}{2}.$$

2) Bei Brüchen sowohl unter sich, als auch mit ganzen Zahlen geben die Faktoren mit veränderter Ordnung einerlei Produkt.

3) Ein Produkt zweier Brüche wird durch eine ganze Zahl, oder einen Bruch multiplizirt, wenn man nur einen beliebigen Faktor damit multiplizirt.

4) Ein Bruch, oder eine ganze Zahl wird mit dem Produkte zweier Brüche multiplizirt, wenn man nur mit einem beliebigen Faktor multiplizirt.

§. 87.

Aufg. Brüche zu dividiren.

Aufl. und Bew. Aus §. 74. X.

Beisp. 1) $\frac{3}{4} : \frac{2}{4} = \frac{12}{8}$;

2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$;

3) $\frac{4b}{5a} : \frac{6b^4}{5a^3} = \frac{20\,a^3b}{30\,ab^4}$;

Brüche werden durch ganze Zahlen, und ganze Zahlen durch Brüche dividirt nach §. 74. VIII. IX.

Folg. 1. Wird ein Bruch durch einen Bruch dividirt, so ist der Quotient größer als der Dividend, und insbesondere größer oder kleiner als 1, je nachdem der Dividend größer oder kleiner ist, als der Divisor.

Wird ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt, so ist der Quotient kleiner als der Dividend, und kleiner als 1.

Wird eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt, so ist der Quotient größer als der Dividend, und größer als 1. (§. 45. Folg. 2. nnd 3.)

2) Ein Produkt zweier Brüche wird mit einer ganzen Zahl, oder einem Bruche dividirt, wenn man nur einen beliebigen Faktor dividirt.

3) Eine ganze Zahl, oder ein Bruch wird mit dem Produkte zweier Brüche dividirt, wenn man nur mit einem beliebigen Faktor dividirt.

4) Die Aufgabe des §. 83. kann auch durch Division gelöst werden; es wird, wie dort,

$$\frac{4 - \frac{2}{3}}{6} = \left(4 - \frac{2}{3}\right) : 6 = \frac{10}{3} : 6 = \frac{5}{6}.$$

Zweites Hauptstück.

Von den Würden und Wurzeln.

Erster Abschnitt.

Von den Würden.

§. 88.

Erklär. 1) Ein Produkt aus gleichen Faktoren heißt Potenz oder Würde; und jeder einzelne dieser Faktoren heißt die Wurzel der Potenz.

2) Die Zahl, welche anzeigt, wie oft eine andere als Faktor gesetzt ist, heißt der Exponent der Potenz.

3) Ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren heißt die zweite Potenz (Quadrat), aus drei gleichen Faktoren die dritte Potenz (Cubus), u. s. w.

Folg. 1) Jede Potenz von 1 ist wieder 1.

2) Der Exponent 1 wird nicht angeschrieben, d. i. $a = a^1$

§. 89.

Lehrs. Das Produkt zweier Potenzen der nämlichen Zahl wird erhalten, indem man die Exponenten addirt;

d. i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Bew. Es ist $a^m = a. a. a \ldots . m$; und

$a^n = a. a. a \ldots . n$;

mithin sind in $a^m . a^n$ lauter gleiche Faktoren vorhanden, und ihre Anzahl ist zuerst m, und dann n; d. h. m + n; folglich ist $a^m . a^n = a^{m+n}$.

Folg. 1. Der Quotient zweier Potenzen der nämlichen Zahl wird erhalten, wenn man vom Exponenten des Dividends jenen des Divisors abzieht;

d. i. $a^m : a^n = a^{m-n}$;

denn $a^{m-n} . a^n = a^m$.

2) Es ist immer $a^0 = 1$;

denn $a^0 = a^{1-1} = a^1 : a^1 = a : a = 1$.

3) Es ist immer $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$;

denn $a^{-m} = a^{m-2m} = a^m : a^{2m} = a^m : a^m . a = 1 : a^m = \frac{1}{a^m}$.

Daher auch $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jeden Faktor aus dem Zähler eines Bruches in den Nenner, und umgekehrt, übertragen.

4) Die angeführten Gesetze für die Multiplikation und Division gelten auch für negative Exponenten und für Brüche, wenn man jene, wie negative Zahlen, und diese wie Brüche in der Rechnung behandelt, d. i.

1) $a^m . a^{-n} = a^{m-n}$;
2) $a^{-m} . a^n = a^{-m+n}$;
3) $a^{-m} . a^{-n} = a^{-m-n}$;
4) $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$;
5) $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$;
6) $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}$.

§. 90.

Lehrs. Die Potenz eines Produkts ist gleich dem Produkte der Potenzen aller einzelnen Faktoren; d. i.

$(a . b . c \dots)^m = a^m . b^m . c^m \dots$

Bew. Bei zwei Faktoren ist

$$(a \cdot b)^m = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \ldots\ldots m \text{ mal};$$
$$= a \cdot a \cdot a \ldots m \text{ mal};\ b \cdot b \cdot b \ldots\ldots m \text{ mal};$$
$$= a^m \cdot b^m.$$

Gilt der Satz für zwei Faktoren, so gilt er auch für drei, u. s. f. folglich für jede mögliche Anzahl von Faktoren;

denn wenn $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ ist, so

ist $(a \cdot b \cdot c)^m = (a \cdot b)^m \cdot c^m$

$= a^m \cdot b^m \cdot c^m$ u. s. f.

§. 91.

Lehrs. Die Potenz eines Quotienten ist wieder ein Quotient aus der Potenz des Zählers und Nenners;

d. i. $\left(\frac{a}{b}\right)^{+m} = \frac{a^{+m}}{b^{+m}}$

Bew. Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^{+m} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots m \text{ mal};$

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots m \text{ mal}}{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots m \text{ mal}} = \frac{a^{+m}}{b^{+m}}.$$

Für — m wird

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$$

§. 92.

Lehrs. Eine Potenz wird zu einer anderen erhoben, wenn man die Exponenten multiplizirt; d. i.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots\ldots n \text{ mal};$$
$$= a^{m + m + m \ldots\ldots n \text{ mal}}$$
$$= a^{mn}.$$

Für — n wird ebenfalls $(a^m)^{-n} = a^{m \cdot -n}$.

*) Die §. §. 90. 91. 92. gelten auch für gebrochene Exponenten.

§. 93.

1) Gleiche Zahlen zu gleichen Exponenten erhoben, geben gleiche Potenzen; d. i.

wenn $a = b$ ist, so ist auch
$$a^m = b^m.$$

Denn die Potenz ist entweder ein Produkt oder ein Quotient; in beiden Fällen aber nur Eine Zahl.

2) Wenn $a > b$ ist, so ist
$$a^m > b^m;$$

Denn a^m ist ein Produkt von eben so vielen Faktoren, als b^m; ist nun $a > b$, so ist auch $a^m > b^m$.

3) Wenn $a > b$ ist, so ist
$$a^{-m} < b^{-m};$$
weil $\frac{1}{a^m} < \frac{1}{b^m}$ ist.

§. 94.

Lehrsatz I) Jede Potenz einer positiven Zahl ist positiv.

Bew. Denn sie ist ein Produkt aus lauter positiven Faktoren, und ein solches Produkt ist positiv; also ist
$$(+a)^{+m} = +a^{+m}.$$

Auch für $-m$ wird $(+a)^{-m} = +a^{-m}$.

II) Von einer negativen Zahl sind alle
1) Potenzen mit geraden Exponenten positiv,
2) mit ungeraden aber negativ.

Bew. für 1) Denn $(-a)^{2m}$ ist ein Produkt aus $2m$ oder aus m Paar gleichen Faktoren; nun ist das Produkt eines jeden Paars positiv, folglich auch das Produkt aller Paare, d. h. die Potenz.

Bew. für 2) Nimmt man in $(-a)^{2m+1}$ die Faktoren paarweise zusammen, so bleibt ein negativer Faktor übrig, daher ist das Produkt negativ.

§. 95.

Lehrs. Jede Potenz eines ächten Bruches ist wieder ein ächter Bruch.

Bew. Aus §. 93, 2.

§. 96.

Erklär. Potenzen heißen gleichartig oder ungleichartig, je nachdem Zahlen und Exponenten einerlei oder verschieden sind;
gleichnamig oder ungleichnamig, je nachdem sie gleiche oder verschiedene Exponenten haben.

II) Zusammengesetzte Potenzausdrücke heißt man nach den steigenden oder fallenden Potenzen einer Zahl geordnet, wenn die Glieder so aufeinander folgen, daß die folgenden Glieder immer höhere, oder immer niedrigere Potenzen jener Zahl enthalten, und alle jene Glieder, welche einerlei Potenz jener Zahl enthalten, in ein Glied zusammengefaßt sind.

Die Potenzen mit negativen Exponenten sieht man für niedriger an, als alle Potenzen mit positiven Exponenten, und zwar für desto niedriger, je größer der negative Exponent ist.

§. 97.

Aufgabe. Potenzausdrücke zu addiren und zu subtrahiren.

Aufl. und Bew. Man ordne sie nach den Potenzen der nämlichen Zahl, setze dann die ungleichartigen nebeneinander, die gleichartigen aber behandle man nach §. 29.

§. 98.

Aufg. Geordnete Potenzausdrücke zu multipliziren.

Aufl. und Bew. Man verfahre nach den Regeln für die Multiplikation allgemeiner Zahlen mit Rücksicht auf §. 89. und §. 91.

Folg. Im geordneten Produkte mehrerer geordneten Faktoren ist das erste Glied gleich dem Produkte der ersten, und das letzte Glied gleich dem Produkte der letzten Glieder aller Faktoren.

§. 99.

Aufg. Geordnete Ausdrücke zu dividiren.

Aufl. 1) Es sey der Dividend D, das erste Glied desselben a, der Divisor d, das erste Glied desselben α, der Quotient Q, das erste, zweite ... Glied q, r..., und der erste Rest R.

2) Man dividire a durch α, so erhält man q;

denn da $D = d.\ Q$, so wird (§. 98, Folg.)

$$a = \alpha.\ q, \text{ folglich}$$

$$\frac{a}{\alpha} = q.$$

3) Von D ziehe man nun q. d ab, und verfahre mit dem Reste R nach No. 1, so findet man r; u. s. f; denn R enthält nur noch das Produkt aus allen folgenden Gliedern von Q in d; und man kann R als neuen Dividend betrachten.

4) Bleibt kein Rest mehr, so ist D durch α theilbar, und es ist genau $Q.\ d = D$.

Folg. Kömmt man auf ein Glied des Quotienten, worin der Exponent der Zahl, nach deren Potenzen geordnet wurde, dem Unterschiede der Exponenten in den letzten Gliedern des Dividends und des Divisors gleich ist, und endigt sich die Operation mit diesem Gliede nicht; so kann sie sich niemals endigen; wegen §. 98, Folg.

Beisp. $(8x + 10x^3 + 5x^5) : (4 - 3x^2)$

$$= 2x + 4x^3 + \frac{17}{4}x^5 + \frac{51\ x^5}{4(4 - 3x^2)}.$$

§. 100.

Aufg. Einfache Ausdrücke zur zweiten und dritten Potenz zu erheben.

Aufl. und Bew. Mit Produkten verfahre man nach §. 90; mit Brüchen nach §. 91; mit Potenzen nach §. 92; die Zeichen werden bestimmt nach §. 94.

Beisp. 1) $(-7bc^{\frac{1}{2}}d^{\frac{3}{4}}m^{-6})^2 = +49b^2cd^{\frac{3}{2}-6}$;

2) $(-7bc^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{2}}m^{-3})^3 = -343b^3cd^{\frac{3}{2}}m^{-9}$.

§. 101.

Aufg. Mehrtheilige Ausdrücke zur zweiten und dritten Potenz zu erheben.

Aufl. I) Bei zweitheiligen Ausdrücken:

Es ist die zweite Potenz eines solchen Ausdruckes allgemein, oder

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

und die dritte Potenz, oder

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Bew. Man multiplizire $a \pm b$ einmal, und dann zweimal mit sich selbst. (§. 88.)

Mit Hilfe dieser Formeln läßt sich jede zweitheilige (allgemeine oder besondere) Zahl zur zweiten und dritten Potenz erheben.

Beispiele:

1) $\left(\frac{1}{2}am - \frac{3}{4}a^{-1}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2m^2 - m + \frac{9}{16}a^{-2}$;

2) $(12)^2 = (10+2)^2 = 100 + 40 + 4$.

II) Bei drei- und mehrtheiligen Ausdrücken.

Aufl. Man setze den allgemeinen Ausdruck einer jeden dreitheiligen Zahl $a \pm b \pm c = (a \pm b) \pm c$ betrachte $(a \pm b)$ als einen Theil, und verfahre nach Nro. I.

Auf diese Weise verfährt man auch bei mehr, als dreitheiligen Ausdrücken.

Anwendung der Würdenlehre auf die Dezimalbrüche.

§. 102.

Erklär. 1) Ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, heißt ein Dezimalbruch.

Die Dezimalbrüche werden auf eine eigenthümliche Weise bezeichnet; man läßt nämlich den Nenner ganz weg, und im Zähler setzt man von der Rechten gegen die Linke zu ein Komma nach so vielen Ziffern, als der Exponent des Nenners anzeigt. Abgängige Ziffern werden durch Nullen ersetzt;

z. B. $\frac{7321}{10^3} = 7,321$; $\frac{23}{10^5} = 0,00023$.

2) Die allgemeine Form eines Dezimalbruches ist $\frac{N}{10^m}$.

Folg. 1. Zu jeder Dezimalstelle gehört als Nenner eine Potenz von 10, deren Exponent so viele Einheiten enthält, als die Dezimalstelle Stellen vom Komma entfernt ist;

z. B. $3,405 = 3 + \frac{405}{10^3}$

$$= 3 + \frac{4}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000}.$$

Daher wird der Werth eines Dezimalbruches nicht geändert, wenn man ihm rechts Nullen anhängt;

z. B. $0,5 = 0,50 = 0,500 = \ldots$

Dadurch kann man dann auch bewirken, daß gegebene Dezimalbrüche gleich viele Dezimalstellen haben.

*) Zweifache Weise, einen Dezimalbruch auszusprechen.

§. 103.

Aufgabe. Einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln.

Aufl. Man dividire den Zähler durch den Nenner, so lange es angeht; hat man keine Ziffer mehr zum Reste zu setzen, so setze man im Quotienten das Komma, und fahre durch Hinzufügung von Nullen im Dividiren fort.

Bew. $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot 10^m}{B \cdot 10^m} = \frac{A \cdot 10^m : B}{10^m}$;

d. h. man füge zum Zähler A m Nullen; dividire dann durch den Nenner B, und schneide im Quotienten m Dezimalstellen ab.

Z. B. $\frac{3}{4} = 0,75$; und $\frac{13}{4} = 3,25$.

Folg. 1) So lange noch ein Rest bleibt, so ist der gefundene Dezimalbruch dem gegebenen gemeinen Bruche nicht ganz gleich, sondern kleiner; dieser Unterschied aber wird immer kleiner, je mehr Dezimalstellen man entwickelt.

Z. B. $\frac{2}{3} = 0,666 \ldots\ldots$

2) Daher kann man auch den bei der Division zum ganzen Quotienten noch hinzukommenden Bruch durch einen Dezimalbruch entweder genau, oder näherungsweise darstellen;

z. B. $\frac{37}{5} = 7\frac{2}{5} = 7,4$.

§. 104.

Aufg. Dezimalbrüche zu addiren oder zu subtrahiren.

Aufl. Durch rechts angehängte Nullen mache man, daß sie gleich viele Dezimalstellen haben; dann addire oder subtrahire man wie bei ganzen Zahlen, indem man die gleichartigen (gleichvielten) Dezimalstellen untereinander schreibt, und schneide in der Summe oder im Unterschiede so viele Dezimalstellen ab, als die Zahlen hatten.

Bew. $\frac{A}{10^m} \pm \frac{B}{10^m} = \frac{A \pm B}{10^m}$.

§. 105.

Aufg. Dezimalbrüche zu multipliziren.

Aufl. Man streiche das Komma weg, multiplizire, wie bei ganzen Zahlen, und im Produkte schneide man so viele Dezimalstellen ab, als beide Faktoren zusammen enthalten.

Bew. $\frac{A}{10^m} \times \frac{B}{10^m} = \frac{A\,B}{10^{m+n}}$

Z. B. $3{,}04 \times 2{,}3 = 3{,}992$;

$0{,}03 \times 0{,}004 = 0{,}00012$.

§. 106.

Aufg. Dezimalbrüche zu dividiren.

Aufl. Man mache zuerst, daß Dividend und Divisor gleich viele Dezimalstellen haben, und dividire dann mit Weglassung des Komma wie bei ganzen Zahlen.

Bew. $\frac{A}{10^m} : \frac{B}{10^m} = \frac{A}{B}$.

Ist A durch B theilbar, so besteht der Quotient nur aus Ganzen; ist A aber nicht durch B theilbar, so stelle man den Bruch $\frac{A}{B}$ in der Form eines Dezimalbruches vor.

Beispiele: $0{,}48 : 0{,}12 = 4$;

$4{,}80 : 0{,}12 = 40$;

$0{,}48 : 1{,}20 = \frac{48}{120} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

Zweiter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

§. 107.

Erklär. 1) Der Faktor a, welcher m mal gesetzt werden muß, um die Potenz b zu geben, heißt die mte

Wurzel derselben; und die Zahl m, welche anzeigt, die wievielte Wurzel a von der Potenz b ist, heißt Wurzelexponent.

2) Das Zeichen der Wurzel ist $\sqrt{\ }$.

Ist also $a^m = b$, so ist $a = \sqrt[m]{b}$.

Folg. 1. Und umgekehrt, wenn $a = \sqrt[m]{b}$ ist, so ist wieder $a^m = b$; d. h. die mte Wurzel einer Potenz zur mten Potenz erhoben, gibt die Potenz wieder.

2) Da $\sqrt[m]{b} = a$, und $b = a^m$ ist,

so wird auch $\sqrt[m]{a^m} = a$.

3) Wurzelgrößen lassen sich auf die Form von Potenzen mit gebrochenen Exponenten bringen;

d. i. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$; denn $(a^{\frac{n}{m}})^m = a^n$. (Folg. 1. u. 2).

Daher erhält man die Wurzel einer Potenz, wenn man den Potenz- durch den Wurzel-Exponenten dividirt; z. B. $\sqrt[3]{a^6} = a^3$.

§. 108.

Erklär. Sind Wurzelexponenten und Zahlen unter dem Wurzelzeichen einerlei, so heißen die Wurzelausdrücke gleichartig, sonst ungleichartig; sind nur die Wurzelexponenten gleich, so heißen sie gleichnamig, sonst ungleichnamig.

§. 109.

I. Eine Wurzel mit einem geraden Exponenten (eine gerade Wurzel) aus einer positiven Zahl kann positiv und negativ seyn; wegen §. 94.

II. Es gibt keine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl, weil keine gerade Potenz einer Zahl negativ seyn kann.

Der Ausdruck $\sqrt[2m]{-a}$ verlangt also eine Unmöglichkeit; daher heißen die geraden Wurzeln aus negativen Zahlen imaginäre oder unmögliche Wurzeln.

Die imaginären Wurzeln sind keine Zahlen, sondern bloße Zahlformen.

III. Eine ungerade Wurzel aus einer positiven Zahl kann nur positiv, und aus einer negativen nur negativ seyn; denn eine ungerade Potenz kann nur von einer positiven Zahl positiv, und nur von einer negativen negativ seyn.

IV. Gleiche Wurzeln aus gleichen Zahlen sind gleich; d. i. wenn $a = b$ ist, so ist auch

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b};$$

denn gleiche Zahlen sind einerlei Zahl; daher müssen auch die Wurzeln daraus einerlei seyn.

V. Bei gleichen Wurzelexponenten ist die Wurzel aus der größeren Zahl größer; d. i.

wenn $a > b$ ist, so ist auch

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b};$$

denn wäre $\sqrt[m]{a} \overline{\overline{<}} \sqrt[m]{b}$, so müßte auch

$$(\sqrt[m]{a})^m \overline{\overline{<}} (\sqrt[m]{b})^m \text{ oder}$$

$$a \overline{\overline{<}} b \text{ seyn. (contra hyp.)}$$

V. Keine Wurzel aus einer ganzen Zahl kann ein eigentlicher Bruch seyn, weil keine Potenz eines eigentlichen Bruches eine ganze Zahl seyn kann.

Ist daher eine Wurzel aus einer ganzen Zahl nicht wieder eine ganze Zahl, so muß sie irrational seyn; z. B. $\sqrt{24}$.

§. 110.

Lehrs. I. Eine Wurzel wird zu einem Potenzexponenten erhoben, wenn man nur die Zahl unter dem Wurzelzeichen erhebt; d. i.

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

Bew. Es ist $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$; folglich $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a}$

II. Aus einer Wurzel wird eine Wurzel ausgezogen, wenn man den vorigen Wurzelexponenten durch den neuen multiplizirt;

d. i. $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a}$.

Bew. $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$.

Ebenso $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}$.

Und umgekehrt ist wieder

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Folg. Wenn sich daher der Wurzelexponent in Faktoren zerlegen läßt, so erhält man die verlangte Wurzel, indem man alle Wurzeln auszieht, deren Exponenten jene Faktoren sind; z. B.

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2.$$

§. 111.

Lehrs. Der Werth einer Wurzel wird nicht geändert, wenn man den Wurzel- und den Potenzexponenten durch dieselbe Zahl multiplizirt, oder, wenn sie theilbar sind, dividirt.

Bew. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})^p} = \sqrt[mp]{a^{np}}$.

Und umgekehrt $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Folg. Daher kann man eine Wurzel durch kleinere Zahlen darstellen, wenn man die dem Potenz- und Wurzelexponenten gemeinschaftlichen Faktoren wegstreicht; z. B.

$$\sqrt[18]{a^6} = \sqrt[3]{a}.$$

§. 112.

Aufg. Eine Wurzel auf einen anderen Exponenten zu bringen, welcher durch den vorigen theilbar ist.

Aufl. Man dividire den neuen durch den gegebenen Wurzelexponenten, und mit dem Quotienten multiplizire man den Wurzel- und Potenzexponenten.

Bew. Wenn $m : p = q$ ist, so ist $m = p\,q$.

Nun ist $\sqrt[p]{a^n} = \sqrt[pq]{a^{nq}}$, folglich $\sqrt[p]{a^n} = \sqrt[m]{a^{nq}}$.

Beisp. $\sqrt[3]{a^2}$

wird $\sqrt[6]{a^4}$

Folg. Daher macht man ungleichnamige Wurzeln gleichnamig, indem man eine Zahl (die kleinste) sucht, die durch alle Wurzelexponenten theilbar ist, und dann jede Wurzel auf diesen neuen Exponenten bringt.

Beisp. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{a^5}, \sqrt[4]{b^3} = \sqrt[24]{5^{12}}, \sqrt[24]{a^{40}}, \sqrt[24]{b^{18}}$.

Dadurch kann man auch finden, welche von zwei gegebenen Wurzeln die größere ist;

z. B. $\sqrt[4]{7} > \sqrt[5]{9}$;

denn $\sqrt[4]{7} = \sqrt[20]{16807}$, und $\sqrt[5]{9} = \sqrt[20]{6561}$.

§. 113.

Lehrs. Die Wurzel aus einem Produkte ist dem Produkte der Wurzeln aller Faktoren gleich; d. i.

$$\sqrt[m]{(A.\ B.\ C.\ldots)} = \sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{B}.\sqrt[m]{C}\ldots.$$

Bew. Es sey $\sqrt[m]{A} = a$, $\sqrt[m]{B} = b$, u. s. w.; so ist auch $A = a^m$ u. s. w.

Folglich $A.\,B.\,C\ldots = a^m.\,b^m.\,c^m\ldots = (a.\,b.\,c.\ldots)^m$;

mithin auch $\sqrt[m]{(A.\ B.\ C.\,.\,.)} = \sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{B}.\sqrt[m]{C}\ldots$

§. 114.

Lehrs. Die Wurzel aus einem Quotienten wird erhalten, wenn man sie aus Dividend und Divisor auszieht.

Bew. Es sey wieder $\sqrt[m]{A} = a$ und $\sqrt[m]{B} = b$, mithin $A = a^m$ und $B = b^m$; so wird

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \text{ und } \sqrt[m]{\left(\frac{A}{B}\right)} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}.$$

Folg. 1) Umgekehrt ist auch

$$\sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{B}\ldots = \sqrt[m]{(A.B\ldots)}$$

$$\text{und } \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{\left(\frac{A}{B}\right)}$$

2) Sind Wurzeln mit ungleichen Exponenten zu multipliziren, oder zu dividiren, so müssen vorher die Exponenten gleich gemacht werden.

3) Enthält ein Produkt Faktoren, aus welchen sich eine verlangte Wurzel ausziehen läßt, so kann man dieß thun, und die erhaltenen Wurzeln vor das Wurzelzeichen setzen; läßt sich auf diese Art aus allen Faktoren die Wurzel ausziehen, so fällt das Wurzelzeichen ganz weg.

Mit Hilfe dieses Satzes ziehe man aus einfachen Ausdrücken Wurzeln aus.

Und umgekehrt kann auch ein Faktor hinter das Wurzelzeichen gebracht werden, wenn man ihn zuvor zum Wurzelexponenten erhebt.

§. 115.

Aufg. Aus einem geordneten zusammengesetzten Ausdrucke die zweite Wurzel zu finden.

Aufl. 1) Man ziehe aus dem ersten Gliede desselben die zweite Wurzel (a); subtrahire a^2 vom Ausdrucke, und dividire das erste Glied des Restes durch $2a$; der Quotient ist der zweite Theil (b) der Wurzel. Das Produkt $(2a + b)b$ ziehe man vom Reste ab. Bleibt ein neuer Rest, so be-

trachte man $(\overline{a+b})$ als Eine Größe (a) und wiederhole das Verfahren, bis kein Rest mehr bleibt.

2) Wenn man auf ein Glied der Wurzel kömmt, worin der Exponent der Zahl, nach welcher geordnet wurde, die Hälfte von dem Exponenten im letzten Gliede des gegebenen Ausdrucks ist, und die Operation endigt sich mit diesem Gliede nicht, so kann sie sich niemals endigen.

§. 116.

Aufg. Aus Ziffern die zweite Wurzel auszuziehen.

Aufl. Man theile die Ziffern in Abtheilungen von je zwei Ziffern von der Rechten zur Linken; nehme dann die größte Ziffer, deren zweite Potenz noch in der ersten Abtheilung enthalten ist, als erste Ziffer (a) der Wurzel, und ziehe a^2 von der ersten Abtheilung ab. Zum Reste setze man die nächste Abtheilung; dividirt man dann diese Zahl mit Ausschluß der letzten Ziffer, durch 2a, so erhält man die zweite Ziffer (b) der Wurzel. Das Produkt (2ab) b wird abgezogen, und mit dem Reste das Verfahren wiederholt, indem man alle bereits gefundenen Ziffern als a betrachtet;

z. B. $\sqrt{732736} = 856$.

Bleibt zuletzt ein Rest, so ist die Wurzel irrational. (§. 109. V.)

§. 117.

Aufg. Die irrationale zweite Wurzel zu finden.

Aufl. Man hänge der gegebenen Zahl so viele Paare von Nullen an, als man Dezimalstellen verlangt, verfahre nach §. 116, und schneide zuletzt die Dezimalstellen ab.

Bew. $\sqrt{A} = \frac{10^m . \sqrt{A}}{10^m} = \frac{\sqrt{A\ 10^{2m}}}{10^m}.$

Beisp. $\sqrt{3} = 1,7320508 \ldots\ldots$

*) Es ist nicht nothwendig, die Nullen an die gegebene Zahl wirklich anzuhängen, wenn man sie nur den Resten gehörig beisetzt.

§. 118.

Aufg. Aus einem Dezimalbruche die zweite Wurzel auszuziehen.

Aufl. Man theile vom Komma aus sowohl die Ganzen, als auch die Dezimalstellen in Abtheilungen von 2 Ziffern, (bei einer ungeraden Anzahl der Dezimalstellen hängt man rechts ein Null an); verfahre nach §. 116, und setze in der Wurzel das Komma, ehe man die erste Abtheilung von Dezimalstellen herabsetzt.

Bew. $\sqrt{\frac{N}{10^{2m}}} = \frac{\sqrt{N}}{10^m}$.

§. 119.

Aufg. Aus dem Nenner eines Bruches die Wurzeln wegzuschaffen, die darin als Faktoren erscheinen, wenn der Wurzelexponent den zweiten Grad nicht übersteigt.

Aufl. I. Wenn der Nenner einen Faktor von der Form $B\sqrt{C}$ hat, so multiplizire man Zähler und Nenner mit $\sqrt{C}$.

Bew. Es ist $\frac{A}{B\sqrt{C}} = \frac{A.\sqrt{C}}{B\sqrt{C}.\sqrt{C}} = \frac{A.\sqrt{C}}{B.C}$

II. Wenn der Nenner einen Faktor von der Form $\sqrt{B} \pm \sqrt{C}$ hat, so ändere man an einem Gliede desselben das Zeichen, und mit diesem geänderten Nenner multiplizire man Zähler und Nenner des Bruches.

Bew. Es ist $\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A.(\sqrt{B} \mp \sqrt{C})}{(\sqrt{B} \pm \sqrt{C})\ (\sqrt{B} \mp \sqrt{C})} =$

$\frac{A.(\sqrt{B} \mp \sqrt{C})}{B - C}$

III. Hat der Nenner einen Faktor von der Form $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm C$, so multiplizire man Zähler und Nenner

mit $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \mp \sqrt{C}$, oder auch mit $\sqrt{A} \mp \sqrt{B} \mp \sqrt{C}$, dadurch wird der Name auf die Form Nro II. gebracht.

§. 120.

Aufg. Aus dem Nenner Wurzeln wegzuschaffen, wenn der Wurzelexponent größer ist, als 2.

Aufl. Wenn der Nenner einen Faktor von der Form $B\sqrt[m]{C}$ hat, so multiplizire man Zähler und Nenner des Bruches mit einer Potenz der Wurzel, deren Exponent um 1 kleiner ist, als der Wurzelexponent.

Bew. $\frac{A}{B\sqrt[m]{C}} = \frac{A.\sqrt[m]{C^{m-1}}}{B.\sqrt[m]{C}.\sqrt[m]{C^{m-1}}} = \frac{A.\sqrt[m]{C^{m-1}}}{B\,C}$.

§. 121.

Vermischte Beispiele über die Würden- und Wurzellehre.

1) $a^4.\ a^{-n}.\ a^{2n}.\ a^{-2} = a^{2+n}$.

2) $(a^m : a^{-7}) : a^3 = a^{m+4}$.

3) $(7^{-6})^{-3} = 7^{18}$.

4) $\left\{(a^2)^{-3}\right\}^{-4} = a^{24}$.

5) Aus $\frac{8m^3.\ n^{-6}}{x^3\ z}$ wird entweder $8m^3 n^{-6} x^{-3} z^{-1}$

oder $\frac{1}{8^{-1}\ m^{-3}\ n^6\ x^3\ z}$.

6) Der Ausdruck

$$6\,ax^{-3} - 3mx + 8 - \frac{3}{x^3} + 6\,ab\,x - x^{-1} - \frac{1}{x^2}$$

wird nach steigenden Potenzen von x geordnet,

$(6\,a - 3)\ x^{-3} - x^{-2} - x^{-1} + 8\,x^0 + (6\,ab - 3m)\ x$.

7) Beispiel einer Multiplikation.

$$
\begin{array}{l}
3a^2 - 1 + 2a^{-1} + 6a^{-2} \\
\underline{2a^3 - 3a - 4} \\
6a^5 - 2a^3 + 4a^2 + 12a \\
\quad - 9a^3 \qquad + 3a - 6 - 18a^{-1} \\
\qquad\quad \underline{+ 12a^2 \qquad + 4 - 8a^{-1} - 24a^{-2}} \\
6a^5 - 11a^3 + 16a^2 + 15a - 2 - 26a^{-1} - 24a^{-2}
\end{array}
$$

8) Beispiel einer Division:

$$
\begin{array}{l}
a^4 - b^4 : a + b = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3. \\
a^4 + a^3b \\
\underline{- \quad -} \\
\quad - a^3b - b^4 \\
\quad - a^3b - a^2b^2 \\
\quad \underline{+ \qquad +} \\
\qquad + a^2b^2 - b^4 \\
\qquad + a^2b^2 + ab^3 \\
\qquad \underline{- \qquad -} \\
\qquad\quad - ab^3 - b^4 \\
\qquad\quad - ab^3 - b^4 \\
\qquad\quad \underline{+ \qquad +} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

9) $\sqrt[18]{a^{15}} = \sqrt[3.6]{a^{3.5}} = \sqrt[6]{a^5}$.

10) $\sqrt[3]{a^m}, \sqrt[m]{a^2}, \sqrt{a}, \sqrt{a^n}$ werden $\sqrt[6m]{a^{2mm}}, \sqrt[6m]{a^{12}}, \sqrt[6m]{a^{3m}}, \sqrt[6m]{a^{3mn}}$.

11) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{64} \times \sqrt[12]{81} \times \sqrt[12]{125}$
$= \sqrt[12]{64 \times 81 \times 125}$
$= \sqrt[12]{648000}$.

12) $\{\sqrt{2} + 2\sqrt{7} + 3\sqrt{10}\} \times 2\sqrt{5}$
$= 2\sqrt{25} + 4\sqrt{35} + 6\sqrt{50}$
$= 10 + 4\sqrt{35} + 30\sqrt{2}$.

13) $\{5\sqrt{6}-2\sqrt{7}\} \times \{5\sqrt{6}+2\sqrt{7}\}$

$$= 25\sqrt{36}-4\sqrt{49}$$
$$= 122.$$

14) $4\sqrt[12]{12} : 2\sqrt{3} = 4\sqrt[6]{12^2} : 2\sqrt[6]{3^3}.$

$$= 4\sqrt[6]{144} : 2\sqrt[5]{27}$$

$$= 2\sqrt[6]{\frac{144}{27}} - 2\sqrt[6]{\frac{16}{3}}.$$

15) $\sqrt[5]{\left\{\frac{2a^9 - a^3b^6}{a^4 - b^4}\right\}} \times \sqrt[5]{\left\{\frac{a^2b^3c^2 + b^5c^2.}{d^2}\right\}}$

$$= \sqrt[5]{\left\{\frac{a^3(2a^6 - b^6)(a \times b^2)\, b^3c^2}{(a^4 - b^3)\, d^2}\right\}}$$

$$= \sqrt[5]{\left\{\left(\frac{a^3b^3c^2}{d^2}\right)\left(\frac{2a^6 - b^6}{a^2 - b^2}\right)\right\}}$$

16) $\frac{48 - \sqrt{1280} - \sqrt{1620} + 30}{8 - \sqrt{45}} = 6 - \sqrt{20}$

17) $\frac{\sqrt{72} - \sqrt{32}}{\sqrt{8}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$

18) $\frac{1 + \sqrt{12}}{1 - \sqrt{3}} = \left(\frac{1 + \sqrt{12}}{1 - \sqrt{3}}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)$

$$= -\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{3})$$

19) $\frac{4\sqrt{7} + 3\sqrt{5}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = 2\sqrt{14} - \frac{4}{3}\sqrt{21} + \sqrt{10} - \sqrt{15}.$

20) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 3\sqrt{6} - 6.$

21) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^2}}{3^3}$

22) $\sqrt{(\sqrt[3]{960})} = \sqrt[6]{960}$

23) $(38)^2 = (30 + 8)^2 = 900 + 480 + 64$
$= 1444.$

24) $\sqrt{\{49x^2 - 42x^4 + 10x^6\}} = 7x - 3x^3$

$$
\begin{array}{l}
49x^2 \\
\hline
-42x^4 + 10x^6 \\
(+14x - 3x^3) \\
-42x^4 + 9x^6 \\
+ \quad\quad - \\
\hline
+x^6
\end{array}
$$

In diesem Beispiele kann sich die Operation niemals endigen.

25) $\sqrt[3]{(2a^6 b^3 c)} = a^2 b \sqrt[3]{2c}.$

26) $\sqrt{(5^4 . a^8 . b^{10} . c^2)} = 5^2 . a^4 . b^5 . c.$

27) $\sqrt[12]{\frac{3^{15}}{2^{18}}} = \sqrt[12]{\frac{3^{12}3^3}{2^{12}2^6}} = \frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{2^2}}.$

28) $\sqrt[3]{(576a^{-3}bc^2)} = 2^2 . a^{-1} . \sqrt[3]{(3^2 . b . c^2)};$

29) $\sqrt{\{\frac{1}{4}a^2 - ae + e^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}\}}$

$= \frac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}.$

30) $(2 + \sqrt{-3})^3 = 9\sqrt{-3} - 10$

31) $\left(\frac{-3 - 3\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 27.$

32) $(1 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{-1}) \times (1 - \sqrt{3})$
$= -5 + \sqrt{3} - 3\sqrt{-1} + 3\sqrt{-3}.$

33) $\left(\frac{3}{4} a^{-1} m^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-2} z^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{16} a^{-2} m$

$- \frac{3}{4} a^{-1} m^{\frac{1}{2}} x^{-2} z^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} x^{-4} z^{-1}.$

34) $\sqrt{-ab} : \sqrt{-b} = \sqrt{a}$

35) $\frac{8}{1 + \sqrt{-3}} = \frac{8 - 8\sqrt{-3}}{4} = 2 - 2\sqrt{-3}.$

36) $\sqrt{73|\,27|\,36|} = 856.$

```
 64
 ---
 927
 (165)
 825
 -----
  10236
  (1706)
  10236
  -----
   —
```

37) $(3c + 2d)^3 = 27c^3 + 54c^2d + 36cd^2 + 8d^3.$

38) $(2x^2 + x - 3)^3 = 8x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 35x^3$
$+ 45x^2 + 27x - 27.$

39) Einen Bruch von der Form $\frac{a}{b+c}$ durch fortgesetzte Division aufzulösen:

$a : b + c = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \ldots$

$a + \frac{ac}{b}$

$- \quad -$

$- \frac{ac}{b}$

$$\begin{array}{l} -\frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2} \\ + \quad + \\ \hline \qquad + \frac{ac^2}{b^2} \text{ und s. w.} \end{array}$$

Hört man mit der Division auf, so wird zu den Gliedern des Quotienten noch der Rest mit dem Divisor in Bruch- oder Divisionform beigesetzt.

40) $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} : (b-c)$

41) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{x^5}{1-x}$

42) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}.$

43) $\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{1-1}$

44) $\frac{1}{2-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}(2-1) = 1$

45) $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}(2+1) = \frac{1}{3}$

§. 64.

Aufg. Aus allgemeinen sowohl, als besonderen Zahlen die dritte Wurzel auszuziehen.

Aufl. Das Ausziehen der dritten Wurzel sowohl aus allgemeinen, als auch aus besondern Zahlen hat viele Aehnlichkeit mit dem Verfahren, welches bei Ausziehung der zweiten Wurzel angegeben wurde, daher kann ich hier mich um so kürzer fassen.

Hat man die gegebenen allgemeinen Zahlenausdrücke nach den Potenzen einer gewissen Zahl geordnet, so ziehe man aus dem ersten Gliede die dritte Wurzel, diese wird der erste Theil der gesammten Wurzel seyn (a). Hat man a^3 vom gegebenen Ausdrucke abgezogen, so dividirt man

den Rest durch $3a^2$, und erhält so den zweiten Theil (b) der Wurzel. Nun bestimme man die Zahlen $3a^2b$, $3ab^2$, b^3 und ziehe ihre Summe vom Reste ab; bleibt ein neuer Rest, so wiederhole man die Operation, bis kein Rest mehr bleibt.

Bei Ziffern mache man Abtheilungen von je 3 Ziffern; die größte Ziffer, deren dritte Potenz noch in der obersten Abtheilung enthalten ist, nehme man zur ersten Ziffer (a) der Wurzel. Hat man a^3 von jener Abtheilung abgezogen, und den Rest durch $3a^2$ dividirt, so erhält man die zweite Ziffer (b) der Wurzel. Man bilde die Zahlen $3a^2b$ $3ab^2$ und b^3, ziehe sie vom ersten Reste ab, und wiederhole mit dem neuen Reste die vorgeschriebene Operation, bis kein Rest mehr bleibt.

Kömmt man im Verlaufe der Operation auf ein Glied der Wurzel, worin der Exponent der Zahl, nach welcher geordnet wurde, das Drittel von dem Exponenten im letzten Gliede des gegebenen Ausdruckes ist, und die Operarion endigt sich mit diesem Gliede nicht, so kann sie sich niemals endigen.

Bleibt beim Ausziehen der dritten Wurzel aus Ziffern zuletzt noch ein Rest, so ist die gesuchte Wurzel irrational.

Beispiele.

$$\sqrt[3]{\tfrac{27}{64}x^3 - 1\tfrac{1}{8}x^2y + xy^2 - \tfrac{8}{27}y^3} = \tfrac{3}{4}x - \tfrac{2}{3}y$$

$$\begin{array}{rl}
 & \tfrac{27}{64}x^3 \\
 & - \\
\hline
 & -1\tfrac{1}{8}x^2y + xy^2 - \tfrac{8}{27}y^3 \\
 & (+\tfrac{27}{16}x^2) \\
3a^2b = & -\tfrac{9}{8}x^2y \\
3ab^2 = & \qquad + xy^2 \\
b^3 = & \qquad\qquad - \tfrac{8}{27}y^3 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Zur Uebung:

$$\sqrt[3]{27a^3 + 108\,a^2x + 144\,a\,x^2 + 64x^3 - 54a^2b - 144\,abx - 96\,b\,x^2 + 36\,ab^2 + 48\,b^2\,x - 8\,b^3} =$$

$$3a + 4\,x - 2b$$

$$\sqrt[3]{140|\,608|} = \overset{a}{5}\;\overset{b}{2}$$

$$\begin{array}{rl} & 125 \\ \hline & 15608 \\ 3a^2 = & (75) \\ 3a^2b = & 150 \\ 3ab^2 = & 60 \\ b^3 = & 8 \\ \hline & 15608 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{34|\,012|\,224|} = \overset{a}{\underset{a}{3}}\;\overset{}{\underset{b}{2}}\;\overset{b}{4}$$

$$\begin{array}{rl} & 27 \\ \hline & 7012 \\ 3a^2 = & (27) \\ 3a^2b = & 54 \\ 3ab^2 = & 36 \\ b^3 = & 8 \\ \hline & 5768 \\ \hline & 1244224 \\ 3a^2 = & (3072) \\ 3a^2b = & 12288 \\ 3ab^2 = & 1536 \\ b^3 = & 64 \\ \hline & 1244224 \end{array}$$

Zur Uebung:

$$\sqrt[3]{27|\,543|\,608|} = 302.$$

Zweite Abtheilung.

Von den Gleichungen.

Von den Gleichungen.

Erster Abschnitt.
Von den Gleichungen überhaupt.

§. 1.
Erklärungen.

1) Algebra ist jener Theil der Mathematik, welcher die Werthe, der in den Aufgaben unbekannten Größen aus gegebenen Bedingungen vermittels der Gleichungen finden lehrt.

*) Das Wort Algebra ist arabischen Ursprungs.

**) Die Buchstabenrechnung ist demnach noch nicht Algebra.

2) Zwei verschiedene, mit dem Zeichen der Gleichheit verbundene Ausdrücke für einerlei Größe nennt man eine Gleichung;

z. B. $5 + 3 = 8$.

3) Die beiden durch das Gleichheitszeichen verbundenen Ausdrücke heißen die beiden Theile oder Seiten der Gleichung; die durch die Zeichen + oder — verbundenen einzelnen Größen werden Glieder genannt. Z. B. die Gleichung $x = b\,d + a$ besteht aus den beiden Theilen oder Seiten x und $b\,d + a$, von welchen die zweite Seite aus den zwei Gliedern $b\,d$ und a besteht.

4) Die bekannten Größen bezeichnet man mit den ersten Buchstaben (a, b, c....) des Alphabets; die unbekannten aber mit den letzten (x, y, z.)

§. 2.

Erklärung.

Um eine mathematische Aufgabe durch Gleichungen aufzulösen, wird erfordert:

1) Die Bildung oder Formation der Gleichungen aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe. Sie ist die Uebersetzung der Aufgabe aus der bürgerlichen Sprache in die algebraische;

2) die Reduktion und Ordnung der Gleichungen, wodurch dieselben in eine einfachere und zur Auflösung bequemere Gestalt gebracht werden, besonders wenn die Unbekannten in Nennern oder in Wurzelausdrücken vorkommen.

3) Die Auflösung oder Solution, wodurch die Werthe der Unbekannten gefunden werden.

§. 3.

Die Bildung oder das Ansetzen der Gleichungen kann man nicht auf so allgemeine und bestimmte Regeln zurückführen, wie blos mechanische Rechnungsoperationen, z. B. die Ausarbeitung einer schon angesetzten Gleichung, sondern hier kömmt es mehr auf Sachkenntniß, Uebung und richtige Beurtheilung an.

Doch läßt sich folgende Regel anführen: „Man betrachte die Unbekannte so, als ob sie bekannt wäre, und man die Probe über die Richtigkeit der Rechnung machen wollte. Zu diesem Ende nimmt man mit der Unbekannten alle durch die Bedingungen der Aufgabe angegebenen Veränderungen vor, und erhält so zwei Ausdrücke, die entweder einander gleich sind, oder rücksichtlich derer doch aus der Aufgabe hervorgeht, um wie viele Einheiten, oder um wie vielmal der eine größer oder kleiner seyn muß, als der andere.“

*) Dieß wird an einigen Beispielen gezeigt.

Reduktion und Ordnung der Gleichungen.

§. 4.

Die Reduktion einer Gleichung in Beziehung auf

eine Unbekannte besteht darin, daß sie auf eine solche Form gebracht werden muß, daß

1) nur solche Potenzen der Unbekannten vorkommen, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind, und daß

2) die Unbekannte oder eine Potenz derselben weder als Nenner oder Divisor, noch als Theil eines Faktors noch als Theil einer Wurzelgröße in irgend einem Glied der Gleichung enthalten sey.

§. 5.

Sätze für die Reduktion der Gleichungen.

Erster Satz. Jedes Glied einer Gleichung kann dadurch, daß man es von beiden Seiten abzieht oder zu beiden Seiten hinzuaddirt, ohne Störung der Gleichung mit verändertem Zeichen auf die andere Seite versetzt werden; denn eine Gleichung bleibt Gleichung, wenn man zu beiden Seiten derselben Gleiches addirt oder davon subtrahirt.

Es sey $a + b = m$;
da $b = b$ ist, so folgt

$$\begin{array}{r} - \quad - \\ \hline a = m - b. \end{array}$$

Es sey $a - d = f$;
da $d = d$ ist, so folgt

$$a = d + f.$$

Folgerung. Daher kann jede Gleichung auf Null gebracht werden, wenn man alle Glieder der einen Seite auf die andere überträgt;

z. B. $3x^2 - 6m = \frac{3a}{m} - 20d - 1$

wird $3x^2 - 6m - \frac{3a}{m} + 20d + 1 = 0.$

Zweiter Satz. Ein Nenner, der in einem Gliede der Gleichung vorkömmt, läßt sich von demselben ohne Störung der Gleichung wegschaffen, indem man alle übrigen Glieder mit jenem Nenner multiplizirt.

Denn eine Gleichung bleibt ungestört, wenn man beide Seiten derselben mit derselben Größe multiplizirt.

Es sey $\frac{a}{x} + m = x + d.$

Nun ist $x = x;$

folglich $x\left(\frac{a}{x} + m\right) = x(x + d)$

$a + mx = x^2 + dx.$

Z. B. Aus $\frac{5x}{x+3} + \frac{3x}{2x-1} = 4$ wird

$10x^2 - 5x + 3x^2 + 9x = 8x^2 + 24x - 4x - 12.$

Folg. In jeder Gleichung lassen sich die Zeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandeln; denn dieß ist so viel, als beide Seiten mit -1 multipliziren.

Dritter Satz. Eine Größe, die mit einem Gliede als Faktor verbunden ist, läßt sich ohne Störung der Gleichung von diesem Gliede wegschaffen, dadurch, daß man alle übrigen Glieder der Gleichung mit jenem Faktor dividirt.

Denn eine Gleichung, durch einerlei Größe dividirt, bleibt eine Gleichung.

Es sey $ax + m = f + g$

$a = a$

$\frac{ax + m}{a} = \frac{f + g}{a}$

d. i. $x + \frac{m}{a} = \frac{f + g}{a}$

Vierter Satz. Man kann beide Seiten einer Gleichung zu einerlei Potenzexponenten erheben, oder umgekehrt aus beiden Seiten die Wurzel von demselben Grade ausziehen; und

kann von beiden Seiten die Logarithmen nehmen, oder umgekehrt, anstatt der Logarithmen, die zugehörigen Zahlen, ohne daß dadurch die Gleichung gestört wird.

Denn Gleiches auf gleiche Art verändert, gibt wieder Gleiches.

Wenn $a + b = x$ ist,
so ist auch $(a + b)^2 = x^2$,
oder $\sqrt{(a + b)} = \sqrt{x}$.
Wenn $a + b = x$ ist,
so ist auch $\log. (a + b) = \log. x$; und umgekehrt.

Fünfter Satz. Enthält eine Gleichung Potenzen einer Unbekannten mit negativen Exponenten, so können dieselben durch andere mit positiven Exponenten durch Anwendung des Satzes

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

ausgedrückt werden.

§. 6.

Erklärung. Gleichungen, in welchen nur Summen oder Unterschiede, Produkte oder Quotienten, Potenzen oder Wurzeln der Unbekannten vorkommen, heißen algebraische, die übrigen aber transzendente Gleichungen. So sind z. B. alle Gleichungen, welche Ausdrücke, wie $\log. x$, a^x, $\sin x$ u. s. w. enthalten, transzendente.

§. 7.

Erklär. Eine Gleichung heißt rational, wenn sie weder Wurzelgrößen, die auf irgend eine Art durch eine unbekannte Größe bestimmt werden, noch auch solche Potenzen unbekannter oder mit unbekannten verbundener Größen enthält, welche gebrochene Zahlen als Exponenten haben; sonst heißt sie irrational.

Folg. Es ist daher wohl möglich, daß eine Gleichung in Bezug auf einige Unbekannte algebraisch, in Bezug auf andere aber transzendent; in Bezug auf einige rational, in Bezug auf andere irrational ist.

Z. B. Die Gleichung $\log z + 3 x^2 = \sqrt[3]{y}$ ist in Bezug auf x und y algebraisch, in Bezug auf z transzendent; in Bezug auf x rational, in Bezug auf y irrational.

§. 8.

Aufgabe. Eine irrationale Gleichung rational zu machen.

I. Wenn nur die nämliche Wurzelgröße, und zwar nur in Einem Gliede der Gleichung vorkömmt.

Auflösung. In diesem Falle läßt sich die irrationale Gleichung auf die Form

$$a \sqrt[m]{x} = B$$

bringen; woraus die rationale Gleichung

$$a^m x = B^m$$

entsteht.

Denn dadurch, daß man das irrationale Glied allein auf eine Seite der Gleichung bringt, und alsdann beide Seiten zur nämlichen Potenz des Wurzelexponenten erhebt, verschwindet, ohne Störung der Gleichung, der Wurzelausdruck.

Z. B. $a + b \sqrt{x} = c$

$b \sqrt{x} = c - a$

$b^2 x = (c - a)^2$.

II. Wenn mehrere unbekannte Wurzelgrößen vorkommen; und

1) sowohl die Größen, deren Wurzeln angezeigt werden, als auch die Wurzelexponenten einerlei sind.

Auflösung. Die irrationale Gleichung läßt sich auf die Form

$$(a \pm b \pm c \ldots.) \sqrt[m]{x} = B$$

bringen, woraus die rationale Gleichung

$$(a \pm b \pm c \ldots.)^m x = B^m$$

entsteht, indem man zuerst die Glieder mit der Wurzelgröße auf die eine, die übrigen Glieder aber auf die andere Seite der Gleichung bringt, dann die erstern dergestalt in Faktoren zerlegt, daß die Wurzelgröße ein Faktor wird, und hernach beide Seiten zur Potenz des Wurzelexponenten erhebt.

Z. B. $a \sqrt[3]{x} + b = c \sqrt[3]{x} + x$

$a \sqrt[3]{x} - c \sqrt[3]{x} = x - b$

$$\sqrt[3]{x(a-c)} = x - b$$
$$x.(a-c)^3 = (x-b)^3.$$

2) Wenn entweder die Größen, deren Wurzeln angezeigt werden, oder die Wurzelexponenten, oder beide zugleich verschieden sind.

Aufl. Die irrationale Gleichung läßt sich dann auf verschiedene Formen bringen;

z. B. a) auf die Form

$$a\sqrt[m]{x} = b\sqrt[n]{y}.$$

Man wiederhole das für den ersten Fall angegebene Verfahren bei jeder von den verschiedenen Wurzelgrößen besonders, jedoch so, daß man jene zuerst wegschafft, welche den größern Wurzelexponenten hat.

Man erhält

$$a^m.\ x = b^m \sqrt[n]{y^m}$$
$$a^{mn}\ x^n = b^{mn}\ y^m$$

Z. B. $\sqrt[3]{(2x^2-5)} = \sqrt{(2x+1)}$ wird
$$(2x^2-5)^2 = (2x+1)^3.$$

Oder b) auf die Form

$$a\sqrt{u} + b\sqrt{x} = c\sqrt{y} + d\sqrt{z}.$$

Durch zweimaliges Erheben zur zweiten Potenz entsteht zuerst

$$a.^2 u + b.^2 x + 2ab\sqrt{ux} = c.^2 y + d.^2 z + 2cd\sqrt{yz}$$

oder

$$a.^2 u + b^2 x - c^2 y - d^2 z = 2cd\sqrt{yz} - 2ab\sqrt{ux};$$

dann

$$(a.^2 u + b^2 x - c^2 y - d^2 z)^2 = 4c^2 d^2.\ yz + 4a^2 b.^2 \times .\ ux - 8abcd.\ \sqrt{(uxyz)}$$

welche Gleichung sich nach dem beim ersten Falle gezeigten Verfahren rational machen läßt.

Z. B. Die Gleichung

$\sqrt{(x+1)} + \sqrt{(2x+9)} = \sqrt{(7x+8)}$ hat die so eben behandelte Form, wenn man in derselben $z = o$ setzt. Man erhält daher

$$x+1+2x+9+2\sqrt{\{(x+1)(2x+9)\}} = 7x+8,$$

oder $2x-1=\sqrt{\{(x+1)(2x+9)\}}$,

woraus $(2x-1)^2=(x+1)(2x+9)$.

Oder c) auf die Form

$$a\sqrt[m]{x}=b\sqrt{y}+c\sqrt{z}+d$$

daraus entsteht $a.^m x=(b\sqrt{y}+c\sqrt{z}+d)^m$; bestimmt man nun die mte Potenz von $(b\sqrt{y}+c\sqrt{z}+d)$, so können in dem Ausdrucke keine andere irrationalen Glieder vorkommen, als solche, welche $\sqrt{y}$, oder $\sqrt{z}$ oder $\sqrt{yz}$ zum Faktor haben; werden daher die rationalen und auch die irrationalen gleichartigen Glieder abgekürzt, so muß die Gleichung die Form

$$e+f\sqrt{y}=g\sqrt{z}+h\sqrt{yz}$$

erhalten, welche sich nach dem für die vorhergehende Form gezeigten Verfahren rational machen läßt.

Z. B. $\sqrt[3]{(x+1)}=2\sqrt{(x-3)}-2$ ist von der unter c) angegebenen Form, wenn man in derselben $z=o$ setzt.

Man erhält

$$x+1=8(x-3)\sqrt{(x-3)}-24(x-3)+24\sqrt{(x-3)}-8,$$

oder $25x-63=8x\sqrt{(x-3)}$

$$(25x-63)^2=64x^2.(x-3).$$

Die Gleichung

$$\sqrt[3]{(1+x)}-1=\sqrt{(1-x)} \text{ wird}$$

$$(4x-3)^2=(4-x)^2.(1-x).$$

Die Gleichung

$$\sqrt[3]{x}=a+\sqrt{y}$$

wird

$$(x-a^3-3ay)^2=(3a^2+y)^2.y$$

§. 9.

Folg. Um also eine Gleichung auf die im §. 4. angegebene Form in Rücksicht einer Unbekannten zu bringen, muß man

1) die Potenzen dieser Unbekannten, welche negative Exponenten haben, und

2) die Nenner, in denen diese Unbekannte vorkömmt, wegschaffen. Der leichtern Rechnung wegen schafft man gewöhnlich auch alle anderen Nenner weg;

3) die Gleichung rational machen, und

4) die Multiplikation bei jenen Gliedern verrichten, in denen die Unbekannte als Theil eines Faktors erscheint.

§. 10.

Erklärung.

Eine rationale Gleichung heißt in Bezug auf eine Unbekannte geordnet, wenn die Gleichung

1) die Unbekannte in keinem Nenner mehr enthält; wenn sie

2) auf Null gebracht ist; wenn

3) die höchste Potenz der Unbekannten im Anfange, positiv und mit dem Coeffizienten 1 steht;

4) wenn alle Coeffizienten von einerlei Potenz der Unbekannten in eine Summe gebracht sind; und endlich

5) die übrigen Potenzen der Unbekannten nach der Ordnung ihrer Exponenten aufeinander folgen.

Z. B. Wird die Gleichung

$$\frac{4x^2-3}{x-1}-\frac{5x^2}{2x+1}=2x+5,\text{ geordnet,}$$

so entsteht

$$x^3-x^2-x-2=0.$$

§. 11.

Zur Uebung:

Die Gleichung

$$\frac{a^2}{b+c^2x^{-1}}=x-\sqrt{a(b+x)}$$

soll reduzirt und geordnet werden.

Man erhält nach und nach

$$\frac{a^2x}{bx+c^2}=x-\sqrt{a(b+x)},$$

$$a^2 x = (bx + c^2) x - (bx + c^2) \sqrt{a(b+x)},$$

$$(bx + c^2) \sqrt{a(b+x)} = (bx + c^2) x - a^2 x$$
$$= bx^2 + (c^2 - a^2) x,$$

$$(bx + c^2)^2 . a(b+x) = \{bx^2 + (c^2 - a^2) x\},$$

woraus

$$ab^2 x^3 + 2abc^2 x^2 + ac^4 x + ab^3 x^2 + 2ab^2 c^2 x$$
$$+ abc^4 = b^2 x^4 + 2b(c^2 - a^2) x^3 + (c^2 - a^2)^2 x^2;$$

woraus

$$b^2 x^4 + 2b(c^2 - a^2) x^3 - ab^2 x^3 + (c^2 - a^2)^2 x^2$$
$$- 2abc^2 x^2 - ab^3 x^2 - ac^4 x - 2ab^2 c^2 x$$
$$- abc^4 = o,$$ oder

$$b^2 x^4 + (2bc^2 - 2a^2 b - ab^2) x^3$$
$$+ \{(c^2 - a^2)^2 - 2abc^2 - ab^3\} x^2 - (ac^4 + 2ab^2 c^2) x$$
$$- abc^4 = o,$$ oder

$$x^4 + \frac{(2c^2 - 2a^2 - ab)}{b} x^3 + \frac{\{(c^2 - a^2)^2 - ab(2c^2 + b^2)\}}{b^2} x^2$$
$$- \frac{ac^2 (c^2 + 2b^2)}{b^2} x - \frac{ac^4}{b} = o.$$

§. 12.

Erklär. Eine geordnete Gleichung ist vom so vielten Grade, als der höchste Exponent der unbekannten Größe anzeigt; z. B. Die Gleichung

$$x^4 + 6x^3 y^3 + 3x^2 y - 6x - 80y^2 + 12 = o$$

ist in Bezug auf x geordnet, vom 4ten Grade; würde sie aber in Bezug auf y geordnet, so wäre sie vom 3ten Grade.

§. 13.

Erklär. Eine geordnete Gleichung heißt vollständig, wenn sie außer jener Potenz der Unbekannten, von deren Exponenten ihr Grad seine Benennung erhält, auch noch alle niedern Potenzen und ein von der Unbekannten unabhängiges Glied enthält; (für dieses letzte Glied wird auch die Summe aller bekannten Glieder genommen, wenn deren mehrere vorhanden sind); im Gegentheile heißt die Gleichung unvollständig.

Folg. Demnach ist die allgemeine Form einer geordneten Gleichung des mten Grads:

$$x^m \pm a x^{m-1} \pm b x^{m-2} \pm c x^{m-3} \pm \ldots \pm m x \pm n = 0;$$

wobei die bekannten Coeffizienten a, b, c ... m, n zwar nicht x, aber vielleicht noch andere unbekannte Größen enthalten können.

Bey den unvollständigen Gleichungen sind die Coeffizienten der fehlenden Glieder = o.

§. 14.

Eintheil. Man theilt die geordneten Gleichungen

A. nach ihrem Grade

1) in Gleichungen des ersten Grades, oder in einfache Gleichungen, wenn die Unbekannte nur in der ersten Potenz erscheint, und

2) in höhere, wenn sie den ersten Grad übersteigen.

Die Gleichungen vom zweyten Grade nennt man auch quadratische, die vom dritten cubische, und die vom vierten biquadratische.

Die höheren Gleichungen sind wieder

a) reine, wenn sie nur eine Potenz der unbekannten Größe enthalten, und

b) unreine oder gemischte, wenn mehrere verschiedene Potenzen der unbekannten Größe vorkommen.

B. Nach der Anzahl der in den Gleichungen vorkommenden Unbekannten theilt man sie ein in Gleichungen mit Einer und mit mehreren Unbekannten.

§. 15.

Erklär. Sind die Bedingungen einer Aufgabe mit mehreren Unbekannten so beschaffen, daß eben so viele von einander unabhängige Gleichungen gebildet werden können, als Unbekannte da sind, so heißt sie bestimmt; dagegen unbestimmt, wenn mehr Unbekannte da sind, als Gleichungen gebildet werden können; und mehr als be-

stimmt, wenn mehr Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind.

Die Lehre von den bestimmten Aufgaben heißt bestimmte, die von den unbestimmten Aufgaben unbestimmte Analytik.

Auch eine Gleichung heißt man bestimmt oder unbestimmt, je nachdem sie nur Eine Unbekannte oder mehrere enthält.

Um den Unterschied zwischen bestimmten und unbestimmten Aufgaben deutlich zu machen, diene folgendes Beispiel:

Man soll zwei Zahlen finden, deren Summe gleich hundert ist;

d. i. $x + y = 100$.

In dieser Gleichung können wir für x und y eine unendliche Menge ganzer und gebrochener, positiver und negativer Zahlen setzen, die alle der Bedingung der Aufgabe entsprechen; wie z. B.

$1 + 99 = 2 + 98 = 3 + 97$ u. s. w.

$\frac{1}{2} + 99\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + 99\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + 99\frac{3}{4}$ u. s. w.

$101 - 1 = 102 - 2 = 103 - 3$ u. s. w.

§. 16.

Die vollständige und allgemeine Theorie der Gleichungen kann hier keinen Platz finden, weil ich nur einen Elementarunterricht geben will. Ich werde daher im Folgenden nur die Lehre von den einfachen Gleichungen mit Einer sowohl, als mit mehreren Unbekannten vortragen, hierauf zu den Gleichungen des zweiten Grades übergehen, und von den Gleichungen, die den zweiten Grad übersteigen, nur die leichtern Fälle abhandeln. Auch eine kleine Sammlung von Aufgaben, besonders von solchen beizufügen, welche häufig im Geschäftsleben ihre Anwendung finden, hielt ich nicht für überflüssig.

Zweiter Abschnitt.

Von den einfachen Gleichungen mit Einer und mit mehreren Unbekannten.

§. 17.

Erklärung.

1) Eine Gleichung heißt identisch, (das nämliche sagend) wenn ihre Richtigkeit für jeden Werth der darin etwa vorkommenden noch unbestimmten Zahlen durch die Rechnungsregeln nachgewiesen werden kann; z. B.

$$x + y\,(c - d) = x + y\,c - y\,d;$$

Ist sie hingegen nicht für alle Werthe jener Zahlen richtig, so heißt sie eine nicht identische, und die Werthe, für welche sie richtig ist, nennt man die Wurzeln der Gleichung; z. B.

$$3\,x + 5 = 2\,(x + 6);$$

diese Gleichung ist nur für $x = 7$ richtig, und der Werth $x = 7$ ist eine Wurzel derselben.

2) Die identischen Gleichungen enthalten nur eine Anwendung der Rechnungsregeln; sie bestimmen daher keinen Werth der darin vorkommenden Unbekannten. Die nicht identischen Gleichungen aber gelten nur für gewisse Werthe der Unbekanuten, welche daher eben durch die Gleichung bestimmt sind.

*) Statt Wurzel würde man besser Resultat sagen, weil die Benennung Wurzel auch noch etwas ganz Verschiedenes bezeichnet.

§. 18.

Erklär. Eine Gleichung auflösen, heißt die Wurzeln derselben oder die Werthe der Unbekannten auffinden.

§. 19.

Aufgabe. Eine einfache Gleichung mit Einer Unbekannten aufzulösen.

Auflösung. Man bringe sie zuerst, indem man sie ordnet, auf die allgemeine Form (§. 13.)

$$x \pm a = 0.$$

Diese verwandle man hierauf nach den Regeln des §. 5 in eine andere Gleichung, in welcher die Unbekannte auf der einen Seite ganz allein, positiv und mit dem Coeffizienten 1 steht; die bekannten Zahlen aber auf der andern Seite stehen, d. h. in $x = \mp a$.

Beispiele:

1) $$8x + 26 = 50 - 4x \text{ gibt}$$
$$x = 2.$$

2) $$\frac{3x}{4} - 9 + \frac{4x}{7} = \frac{2x}{5} + 15 \text{ gibt}$$
$$x = 26\tfrac{2}{43}.$$

3) $$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \text{ gibt}$$
$$x = 84.$$

4) $$\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{6}\right) 4 = 2x \text{ gibt}$$
$$x = x.$$

d. h. man nehme für x was immer für eine Zahl, so wird sie der Gleichung Genüge leisten.

5) $$\frac{(a+b)(x-c)}{a-b} + 4b = 2x - \frac{ac}{3a+b} \text{ gibt}$$
$$x = \frac{2a^2c + 5abc + b^2c - 12a^2b + 8ab^2 + 4b^3}{-3a^2 + 8ab + 3b^2}$$

6) $$\frac{4x}{x-1} - \frac{10}{3} = \frac{2x}{3x-5} \text{ wird}$$
$$26x - 50 = 0$$
$$x = \tfrac{25}{13}.$$

Die Probe der richtigen Auflösung wird dadurch gemacht, daß die gegebenen oder gebildeten Gleichungen, wenn man in ihnen für die Unbekannten die gefundenen Werthe derselben setzt, identisch werden müssen. Die eine Seite der Gleichung wird dann nur die entwickelte Form

der andern, und die Gleichung reduzirt sich endlich darauf, daß auf beiden Seiten derselben die gleiche Größe unter dem nämlichen Ausdrucke erscheint; z. B.

Nach Beisp. 1) war $x = 2$; folglich

$$16 + 26 = 50 - 8$$
$$42 = 42.$$

§. 20.

Aufgabe: Aus zwei Gleichungen die Werthe von zwei Unbekannten zu finden.

Auflösung. Man schaffe aus den 2 gegebenen Gleichungen eine Unbekannte weg, wodurch Eine Gleichung mit Einer Unbekannten zum Vorschein kömmt, welche alsdann nach den bereits bekannten Regeln aufgelöst wird.

Hier lassen sich drei Methoden anwenden;

1) wenn man die zwei Gleichungen für die wegzuschaffende Unbekannte auflösen will.

In diesem Falle löse man die zwei Gleichungen für die wegzuschaffende Unbekannte auf, und setze die erhaltenen Werthe gleich; denn diese Werthe müssen nothwendig unter einander gleich seyn, weil sie einer und derselben dritten Größe gleich sind.

Z. B. $x + y = a$

und $x - y = b$;

da $x = a - y$ ist,

und $x = b + y$, so folgt

$a - y = b + y$ und

$$y = \frac{a - b}{2}.$$

Ist die Eine der 2 Unbekannten gefunden, also bekannt, so ist eine jede der zwei gegebenen Gleichungen nur mehr noch eine Gleichung mit einer Unbekannten, indem man für die andere Unbekannte den dafür gefundenen Werth setzt, daher man dann durch Auflösung der einen oder der andern der zwei gegebenen Gleichungen auch noch die zweite Unbekannte findet; d. i. die erste Gleichung wird

$$x + \frac{a - b}{2} = a \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a + b}{2} \text{ folgt;}$$

oder: die zweite Gleichung wird

$$x - \frac{a - b}{2} = b, \text{ woraus wieder}$$

$$x = \frac{a + b}{2} \text{ wird.}$$

2) Wenn man nur Eine von den zwei gegebenen Gleichungen auflösen will.

Man suche den Werth der wegzuschaffenden Unbekannten aus der Gleichung, die man auflösen will, und setze den gefundenen Werth anstatt derselben in die andere Gleichung.

Denn man kann Gleiches für Gleiches setzen. Z. B.

$$x + y = a$$
$$x - y = b.$$

Aus der ersten Gl. wird $x = a - y$, folglich wird die zweite Gl. $(a - y) - y = b$.

und daraus $y = \frac{a - b}{2}.$

Anmerk. Die andere Unbekannte x wird auf die nämliche Weise gefunden, wie bei dem ersten Fall gezeigt wurde.

3) Wenn man gar keine von den zwei Gleichungen auflösen will. (Eliminations-Methode.)

Hat die wegzuschaffende Unbekannte in den zwei gegebenen Gleichungen denselben Coeffizienten, so zieht man die eine Gleichung von der andern ab, wenn die wegzuschaffende Unbekannte in beiden Gleichungen einerlei Zeichen hat; dagegen addirt man bei verschiedenen Zeichen. Dadurch fällt die Unbekannte hinweg, und da man Gleiches zu Gleichem addirt, oder Gleiches von Gleichem subtrahirt, so muß wieder eine Gleichung zum Vorschein kommen.

Z. B. $x + y = a$ und $x + y = a$

$$\begin{array}{ll} x - y = b & x - y = b \\ & - \quad + \quad - \\ \hline 2x = a + b & 2y = a - b \\ x = \frac{a + b}{2} & y = \frac{a - b}{2} \end{array}$$

Bei verschiedenen Coeffizienten der wegzuschaffenden Unbekannten macht man diese Coeffizienten vorher gleich, was durch Multiplikation geschieht; dann verfährt man, wie so eben bei dem Falle gezeigt wurde, bei welchem die Coeffizienten gleich sind.

Z. B. $x - y = 18$

$2x + y = 51.$

x findet sich sogleich aus

$$\begin{array}{l} x - y = 18 \\ 2x + y = 51 \\ \hline 3x = 69 \\ x = 23. \end{array}$$

Wird dann die erste Gleichung mit 2 multiplizirt, so entsteht

$2x - 2y = 36$, dieß mit der zweiten verbunden

$$\begin{array}{l} - \quad + \quad - \\ \text{gibt } 2x + y = 51 \text{ und abgezogen,} \\ \hline 3y = 51 - 36 \\ y = 5 \end{array}$$

Ein anderes Beispiel:

$$12x + 7y = 62$$
$$8x + 5y = 42.$$

Um die Coeffizienten von x gleich zu machen, multiplizire man die erste Gleichung mit 2, und die zweite mit 3, so entsteht

$$\begin{array}{l} 24x + 14y = 124 \\ \text{und } 24x + 15y = 126 \text{ durch Abziehen aber} \\ \hline y = 2. \end{array}$$

Um die Coeffizienten von y gleich zu machen, multi-

plizire man die erste Gleichung mit 5, und die zweite mit 7, so entsteht

$$
\begin{array}{rl}
& 50\,x + 35\,y = 310 \\
\text{und} & \underline{56\,x + 35\,y = 294} \quad \text{durch Abziehen aber} \\
& 4\,x \quad\quad = 16 \\
& x \quad\quad = 4.
\end{array}
$$

Zusatz. Für zwei Unbekannte müssen zwei verschiedene Gleichungen gebildet werden, d. h. zwei solche Gleichungen, die nicht aus einander folgen, sondern von welchen jede aus eignen Bedingungen der Aufgabe oder der Unbekannten gebildet ist; sonst wäre die Aufgabe unbestimmt. (§. 15.)

§. 21.

Aufgabe. Aus drei gegebenen Gleichungen A, B und C zwischen drei Unbekannten diese Unbekannten zu bestimmen.

Auflösung. Man schaffe aus den drei Gleichungen zwei Unbekannte, eine nach der andern, hinweg; dadurch erhält man Eine Gleichung mit Einer Unbekannten, welche alsdann nach den bereits bekannten Regeln aufgelöst wird.

Erster Fall. Wenn eine und dieselbe Unbekannte in allen drei Gleichungen vorkömmt.

Um aus den drei Gleichungen zwei Unbekannte nach einander hinwegzuschaffen, kann man nach irgend einer der Methoden des §. 20. verfahren.

Verfährt man nach der ersten Methode, so sucht man den Werth der einen Unbekannten aus allen drei Gleichungen, und setzt dann den ersten und zweiten Werth, und dann den zweiten und den dritten, (oder auch den ersten und dritten) gleich, so erhält man zwei neue Gleichungen D und E, welche nur noch zwei Unbekannte enthalten.

Eben so bestimmt man den Werth der zweiten wegzuschaffenden Unbekannten aus den Gleichungen D und E, und setzt diese Werthe in einer sechsten Gleichung F einander gleich. Diese Gleichung F wird nur noch die dritte Unbekannte enthalten.

z. B. A) $x + \frac{y + z}{2} = a$

B) $y + \frac{x + z}{3} = b$

C) $z + \frac{x + y}{4} = c$

folglich $x = \frac{2a - y - z}{2}$

$x = 3b - 3y - z$

$x = 4c - y - 4z.$

daraus D) $\frac{2a - y - z}{2} = 3b - 3y - z$, und

E) $\frac{2a - y - z}{2} = 4c - y - 4z.$

Aus D wird $y = \frac{6b - 2a - z}{5}$ und

aus E $y = 8c - 2a - 7z$, folglich

F) $\frac{6b - 2a - z}{5} = 8c - 2a - 7z,$

woraus $z = \frac{20c - 4a - 3b}{17.}$

Da hierdurch die dritte Unbekannte z gefunden, also eine Bekannte wird, so wird, wenn man ihren Werth in die Gleichungen D oder E setzt, jede von diesen beiden Gleichungen nur noch die Unbekannte y enthalten, folglich wird z. B. aus der Gleichung E

$$y = 8c - 2a - 7\left(\frac{20c - 4a - 3b}{17}\right)$$

$$= \frac{21b - 6a - 4c}{17.}$$

Da hierdurch auch die zweite Unbekannte y gefunden, folglich eine Bekannte wird, so wird, wenn man ihren Werth, und den Werth von z in die Gleichungen A, B

oder C setzt, jede von diesen nur noch die einzige Unbekannte x enthalten, folglich wird z. B. aus der Gleichung B

$$x = 3b - 3\left(\frac{21b - 6a - 4c}{17}\right) - \frac{20c - 4a - 3b}{17}$$

$$= \frac{22a - 9b - 8c}{17}$$

Verfährt man nach der zweiten Methode, so sucht man aus der ersten Gleichung den Werth der einen Unbekannten, und setzt ihn anstatt derselben in den zwei andern Gleichungen, C und B, so entstehen zwei neue Gleichungen D und E; diese enthalten dann nur noch 2 Unbekannte; sucht man wieder aus der Gleichung D den Werth der zweiten wegzuschaffenden Unbekannten, und setzt ihn anstatt derselben in die ~~dritte~~ Gleichung E, so wird die dadurch entstehende neue Gleichung F nur noch die dritte Unbekannte allein enthalten.

z. B. A) $x + \frac{y + z}{2} = a$

B) $y + \frac{x + z}{3} = b$

C) $z + \frac{x + y}{4} = c$

folglich, da $x = \frac{2a - y - z}{2}$ wird,

D) $5y + 2a + z = 6b$

und $y = \frac{6b - 2a - z}{5}$ und

E) $7z + 2a + y = 8c$; woraus

F) $34z = 40c - 8a - 6b$

$z = \frac{20c - 4a - 3b}{17}$ wie zuvor.

Die Werthe von x und y werden ganz auf dieselbe Weise, wie vorher bei Anwendung der ersten Methode gefunden.

Verfährt man nach der dritten Methode, so macht

man die Coeffizienten der ersten wegzuschaffenden Unbekannten in den Gleichungen A und B durch Multiplikation gleich, worauf man, nach Beschaffenheit der Zeichen dieser Coeffizienten, die Gleichungen A und B zu einander addirt, oder von einander subtrahirt; die neue Gleichung D enthält nur noch zwei Unbekannte.

Eben so macht man die Coeffizienten der nämlichen Unbekannten in den Gleichungen A und C, (oder auch B und C) gleich, worauf man A und C wieder addirt oder subtrahirt; die neue Gleichung E enthält nur noch zwei Unbekannte.

Auf die nämliche Weise behandelt man die Gleichungen D und E, um aus ihnen die zweite Unbekannte wegzuschaffen; die neue Gleichung F hat nur noch allein die dritte Unbekannte.

Z. B. A) $x + \frac{y + z}{2} = a$

B) $y + \frac{x + z}{3} = b$

C) $z + \frac{x + y}{4} = c$

Folglich $2x + y + z = 2a$, und

B × 2 wird $6y + 2x + 2z = 6b$

D) $5y + z = 6b - 2a$

Ebenso $2x + y + z = 2a$, und

C × 2 wird $8z + 2x + 2y = 8c$

E) $7z + y = 8c - 2a$

D) war $5y + z = 6b - 2a$ und

E × 5 wird $35z + 5y = 40c - 10a$

F) $34z = 40c - 8a - 6b$

$z = \frac{20c - 4a - 3b}{17}$ wie zuvor.

Zweiter Fall. Wenn dieselbe Unbekannte nicht in allen drei Gleichungen vorkömmt.

Auflösung. Auch hier müssen zwei Unbekannte weggeschafft werden, was nach irgend einer der drei Methoden des §. 20. geschehen kann. Verfährt man nach der ersten Methode, so suche man aus zwei Gleichungen, z. B. aus A und B den Werth einer und derselben Unbekannten, und setze diese Werthe einander gleich, so erhält man eine neue Gleichung D, welche eben so wie die dritte der gegebenen Gleichungen nur noch zwei Unbekannte erhält.

Eben so bestimme man den Werth der zweiten wegzuschaffenden Unbekannten aus den Gleichungen C und D, und setze diese gefundenen Werthe in einer fünften Gleichung E einander gleich, so wird diese nur noch die dritte Unbekannte allein enthalten.

Z. B. A) $x + y = a$; folglich $x = a - y$

B) $x + z = b$; . . . $x = b - z$

C) $y + z = c$;

also D) $a - y = b - z$.

Aus C) wird $y = c - z$ und

aus D) wird $y = a - b + z$, folglich

E) $a - b + z = c - z$

woraus $z = \frac{b + c - a}{2}$

Setzt man den Werth von z in die Gleichung C oder D, so wird, weil jetzt z bekannt ist, daraus

$$y = \frac{a + c - b}{2}, \text{ und}$$

wenn man die Werthe von z und y in A oder B setzt, so wird

$$x = \frac{a + b - c}{2}$$

Anmerk. 1.) Daß man auch nach der zweiten und dritten Methode des §. 20. verfahren könne, versteht sich

ohnedieß. Ich überlasse die Ausführung dieser Rechnung der Selbstübung.

Anmerk. 2.) Eine Methode, durch welche man aus drei Gleichungen zwischen drei Unbekannten zwei Unbekannte auf einmal wegschaffen kann, wird später erklärt werden.

§. 22.

Beispiele zur Uebung:

1) $x + \frac{1}{2} y = 5$
$y + \frac{1}{3} z = 5$
$z + \frac{1}{4} x = 5.$

Daraus wird $x = \frac{16}{5}$

$y = \frac{18}{5}$

$z = \frac{21}{5}$

2) $2x + 2y + z = 60$
$2x + 3y + 4z = 120$
$10x + 4y + 2z = 180.$

Daraus wird $x = 10$
$y = 12$
$z = 16$

3) $7x + 5y + 2z = 79$
$8x + 7y + 9z = 122$
$x + 4y + 5z = 55.$

Daraus wird $x = 4$
$y = 9$
$z = 3.$

4) $x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z = 187$
$y + \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} z = 187$
$z + \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} z = 187.$

Daraus wird $x = 55$
$y = 121$
$z = 143.$

Der Anfänger kann jedes dieser Beispiele zur Uebung nach jeder der 3 angegebenen Methoden auflösen.

§. 23.

Aufgabe. Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten aufzulösen.

Auflösung. Bei Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten ist das Verfahren das nämliche, wie es bei Gleichungen mit zwei und drei Unbekannten angewandt wurde.

Man schafft von den Unbekannten eine nach der andern hinweg, bis man auf eine Gleichung gelangt, die nur noch Eine Unbekannte enthält. Dieses Wegschaffen oder Eliminiren kann nach irgend einer der 3 Methoden des §. 20. geschehen.

Will man die zwei ersten Methoden anwenden, so sucht man den Werth einer Unbekannten aus allen Gleichungen und setzt die gefundenen Werthe einander gleich; oder man sucht den Werth einer Unbekannten aus einer Gleichung, und setzt ihn anstatt derselben in allen übrigen; in beiden Fällen erhält man Gleichungen, in denen Eine Unbekannte weniger vorkömmt, und auf diese Weise fährt man so lange fort, bis man auf eine Gleichung mit Einer Unbekannten kömmt.

Dieses Verfahren ist aber meistentheils sehr weitläufig und beschwerlich, besonders wenn die Coeffizienten der Unbekannten durch Buchstaben ausgedrückt sind; daher man lieber die unter dem Namen Eliminationsmethode angeführte dritte Methode des §. 20. anwendet, von welcher hier eine weitere Ausführung folgt, jedoch mit Beschränkung auf die einfachen Gleichungen.

Weitere Ausführung der Eliminationsmethode für die Auflösung der einfachen Gleichungen.

§. 24.

A. Bei zwei Gleichungen zwischen zwei Unbekannten.

I) Wenn die zwei gegebenen Gleichungen folgende Form haben:

1) $ax + by = c$ und

2) $a^{I}x + b^{I}y = c^{I}$.

Soll x eliminirt werden, so müssen wir, um die Coeffizienten von x gleich zu machen, die erste Gleichung mit a^{I}, und die zweite mit a multipliziren; wir erhalten dadurch

$$aa^{I}x + ba^{I}y = ca^{I} \text{ und}$$
$$\underset{-}{aa^{I}x} \underset{-}{+} ab^{I}y = \underset{-}{ac^{I}} \text{ folglich}$$
$$y\,(ba^{I} - ab^{I}) = ca^{I} - ac^{I},$$

aus welcher Gleichung x eliminirt ist.

Denn sowohl die erste Gleichung, als auch die zweite bleiben durch die Multiplikation mit a^{I} und a ungestört, und aus der Subtraktion von Gleichungen muß wieder eine Gleichung entstehen.

Zuletzt erhalten wir

$$y = \frac{ca^{I} - ac^{I}}{ba^{I} - ab^{I}} \text{ oder}$$
$$= \frac{ac^{I} - ca^{I}}{ab^{I} - ba^{I}}.$$

Um y zu eliminiren, multiplizire man die erste Gleichung mit b^{I}, die zweite mit b; dadurch entsteht

$$ab^{I}x + bb^{I}y = b^{I}c \text{ und}$$
$$a^{I}bx + bb^{I}y = bc^{I} \text{ folglich}$$
$$x\,(ab^{I} - a^{I}b) = b^{I}c - c^{I}b,$$ in welcher Gleichung y eliminirt ist; aus ihr folgt

$$x = \frac{b^{I}c - c^{I}b}{ab^{I} - a^{I}b}$$

Deßwegen haben wir im §. 20, um aus den zwei Gleichungen

$$12\,x + 7\,y = 62 \text{ und}$$
$$8\,x + 5\,y = 42$$

y zu eliminiren, die erste mit 5 und die zweite mit 7 multiplizirt.

II.) Sind aber zwei Gleichungen von dieser Form gegeben.

$$a\,d\,x + by = c \text{ und}$$
$$a\,d^{I}\,x + b^{I}y = c^{I},$$

in welchen die Coeffizienten von x den gemeinschaftlichen Faktor d haben, so ist es nicht nothwendig, die erste Gleichung mit $a^{I}d$, und die zweite mit ad zu multiplizieren, sondern man darf die Multiplikation bloß mit den nicht gemeinschaftlichen Faktoren a und a^{I} verrichten, wodurch x in beiden Gleichungen denselben Coeffizienten bekommen wird; nämlich man erhält

$$a\,a^{I}\,dx + a^{I}b\,y = c \text{ und}$$
$$a\,a^{I}\,dx + b^{I}a\,y = c^{I}.$$

Deßwegen haben wir im §. 20. bei den zwei Gleichungen

$$12\,x + 7\,y = 62 \text{ und}$$
$$8\,x + 5\,y = 42$$

um x zu eliminiren, die erste Gleichung nicht mit 8, und die zweite nicht mit 12 multiplizirt, sondern die erste nur mit 2, und die zweite mit 3, weil $12 = 4 \times 3$ und $8 = 4 \times 2$ ist, also 4 der gemeinschaftliche Faktor ist.

Daß die beiden Gleichungen, wenn die wegzuschaffende Unbekannte verschiedene Zeichen hat, zu einander addirt werden müssen, ist ohnedieß klar. —

Welche der beiden Gleichungen von der andern subtrahirt wird, ist gleichgültig, doch pflegt man bei Zifferngleichungen immer die kleinere von der größern abzuziehen. Aus

den Coeffizienten der Unbekannten, und an den Zeichen, die ihnen vorstehen, erkennt man leicht, welche Gleichung die kleinere ist. Uebrigens muß man immer damit anfangen, die Unbekannten in eine Seite zusammenzustellen, und die Gleichung von den Brüchen zu befreien.

§. 25.

Eine andere Methode, eine Unbekannte aus zwei gegebenen Gleichungen wegzuschaffen.

Die zwei Gleichungen seien wieder

1) $ax + by = c$ und

2) $a^I x + b^I y = c^I$.

Man multiplizire die erste Gleichung mit der unbestimmten Größe m, so ist

$$amx + bmy = cm.$$

da $a^I x + b^I y = c^I$ die zweite Gleichung ist,

so folgt $(am - a^I)\,x + (bm - b^I)\,y = cm - c^I$.

Da aber m unbestimmt ist, so können wir ihm jeden für unsern Zweck passenden Werth beylegen; nehmen wir m so an, daß $bm = b^I$, (was immer möglich ist, weil wir für m nach Befund der Umstände eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl setzen können), so erhält man

$$x = \frac{cm - c^I}{am - a^I}, \text{ und } y \text{ ist eliminirt,}$$

oder wenn man für m seinen Werth

$$m = \frac{b^I}{b}$$

substituirt, so erscheint

$$x = \frac{b^I c - c^I b}{ab^I - a^I b} \text{ wie zuvor.}$$

Um x zu eliminiren, setzt man nicht $bm = b^I$, sondern $am = a^I$; dadurch erhält man

$$y = \frac{cm - c^I}{bm - b^I}, \text{ und } x \text{ ist eliminirt,}$$

oder wenn man für m seinen Werth

$$m = \frac{a^I}{a}$$

substituirt, so wird

$$y = \frac{ca^I - ac^I}{ba^I - ab^I}$$

$$= \frac{ac^I - ca^I}{ab^I - ba^I}$$

Beispiel.

$$2x + 3y = 12$$
$$3x - y = 7$$

Da hier $a = 2;\ a^I = 3;$
$b = 3;\ b^I = -1;$
$c = 12;\ c^I = 7$ ist,

so wird

$$x = \frac{-12 - 3.7}{-2 - 3.3} = \frac{33}{11} = 3, \text{ und}$$

$$y = \frac{2.7 - 12.3}{-2 - 3.3} = \frac{22}{11} = 2.$$

Anmerkung. Daher kann man jede Zifferngleichung zwischen zwei Unbekannten durch blose Substitution unter die zwei in diesem §. für x und y abgeleiteten Formeln auflösen.

§. 26.

B) Bei drei Gleichungen zwischen drei Unbekannten.

Es seien folgende drei Gleichungen gegeben:

1) $ax + by + cz = d$

2) $a^Ix + b^Iy + c^Iz = d^I$

3) $a^{II}x + b^{II}y + c^{II}z = d^{II}$

Man multiplizire die Gleichung 1) mit a^I und die 2) mit a, so gibt die Differenz beider Produkte eine vierte Gleichung zwischen y und z, nämlich

4) $(ba^I - ab^I)\,y + (ca^I - ac^I)\,z = da^I - ad^I.$

Eine ähnliche fünfte Gleichung zwischen y und z wird man erhalten, wenn man die erste Gleichung mit a^{II} und

die dritte mit a multiplizirt, und die Differenz beider Produkte nimmt; d. i.

$$5)\ (ba^{II} - ab^{II})\, y + (ca^{II} - ac^{II})\, z = da^{II} - ad^{II}.$$

Auf diese Weise ist x eliminirt.

Eliminirt man ganz auf die nämliche Weise aus 4) und 5) auch y, so wird

$$\begin{aligned} z\{&(a^{I} a^{II} bc - aa^{II} bc^{I} - aa^{I} b^{II} c + aab^{II} c^{I}) \\ &- (a^{I} a^{II} bc - aa^{I} bc^{II} - aa^{II} b^{I} c + aab^{I} c^{II})\} \\ = &(a^{I} a^{II} bd - aa^{II} bd^{I} - aa^{I} b^{II} d + aab^{II} d^{I}) \\ &- (a^{I} a^{II} bd - aa^{I} bd^{II} - aa^{II} b^{I} d + aab^{I} d^{II}) \end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält zwar nur die Unbekannte z, ist aber eben nicht von der einfachsten Form. Daher soll jetzt eine Methode gezeigt werden, *zwei Unbekannte auf einmal zu eliminiren.* Diese Methode verdankt man dem französischen Mathematiker Bézout.

§. 27.

Aufgabe. Aus drei gegebenen Gleichungen zwischen drei Unbekannten zwei Unbekannte auf einmal zu eliminiren.

Aufl. Die drei Gleichungen seien

$$ax + by + cz = d$$
$$a^{I}x + b^{I}y + c^{I}z = d^{I}$$
$$a^{II}x + b^{II}y + c^{II}z = d^{II}$$

Multipliziren wir die erste mit einer unbestimmten Größe m, die zweite mit einer gleichfalls unbestimmten Größe m′, addiren sodann beide Gleichungen, und ziehen die dritte davon ab, so bekommen wir

$$x\,(am + a^{I}m^{I} - a^{II}) + y\,(bm + b^{I}m^{I} - b^{II})$$
$$+ z\,(cm + c^{I}m^{I} - c^{II}) = dm + d^{I}m^{I} - d^{II}$$

Um aus dieser Gleichung x und y auf einmal zu eliminiren, und z zu finden, setzen wir

$$am + a^{I}m^{I} = a^{II}$$

und $bm + b^{I}m^{I} = b^{II}$; dann wird

$$z = \frac{dm + d^{I}m_{I} - d^{II}}{cm + c^{I}m^{I} - c^{II}}.$$

Die Gleichungen $\begin{cases} a\,m + a^{I} m^{I} = a^{II} \\ b\,m + b^{I} m^{I} = b^{II} \end{cases}$

geben $$m = \frac{a^{II}\, b^{I} - b^{II}\, a^{I}}{a\, b^{I} - b\, a^{I}}$$

$$m^{I} = \frac{a\, b^{II} - b\, a^{II}}{a\, b^{I} - b\, a^{I}}$$

Diese Werthe in die obige Gleichung gesetzt, machen

$$z = \frac{d\,(b^{I} a^{II} - a^{I} b^{II}) + d^{I}\,(ab^{II} - ba^{II}) - d^{II}\,(ab^{I} - ba^{I})}{c\,(b^{I} a^{II} - a^{I} b^{II}) + c^{I}\,(ab^{II} - ba^{II}) - c^{II}\,(ab^{I} - ba^{I})}.$$

Um y zu finden, müssen wir

$$a\,m + a^{I}\, m^{I} = a''$$
$$c\,m + c^{I}\, m^{I} = c''$$ setzen,

hierdurch verschwinden x und z, und wir haben

$$y = \frac{d\,(c^{I} a^{II} - a^{I} c^{II}) + d^{I}(ac^{II} - ca^{II}) - d^{II}\,(ac^{I} - ca^{I})}{b\,(c^{I} a^{II} - a^{I} c^{II}) + b^{I}\,(ac^{II} - ca^{II}) - b^{II}(ac^{I} - ca^{I}.)}$$

Setzen wir endlich

$$bm + b^{I} m^{I} = b^{II}$$
$$cm + c^{I} m^{I} = c^{II}$$, so verschwinden y und z,

und wir bekommen

$$x = \frac{d\,(c^{I} b^{II} - b^{I} c^{II}) + d^{I}\,(bc^{II} - cb^{II}) - d^{II}(bc^{I} - cb^{I})}{a\,(c^{I} b^{II} - b^{I} c^{II}) + a^{I}(bc^{II} - cb^{II}) - a^{II}(bc^{I} - cb^{I}.)}$$

Vollziehen wir in allen 3 Ausdrücken die Multiplikation und schreiben sie so, daß ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, und ändern bei den Werthen von x und z die Zeichen im Zähler und Nenner, so erhalten sie folgende Form:

$$z = \frac{ab^{I} d^{II} - ad^{I} b^{II} + da^{I} b^{II} - ba^{I} d^{II} + bd^{I} a^{II} - db^{I} a^{II}}{ab^{I} c^{II} - ac^{I} b^{II} + ca^{I} b^{II} - ba^{I} c^{II} + bc^{I} a^{II} - cb^{I} a^{I}}$$

$$y = \frac{ad^{I} c^{II} - ac^{I} d^{II} + ca^{I} d^{II} - da^{I} c^{II} + dc^{I} a^{II} - cd^{I} a^{II}}{ab^{I} c^{II} - ac^{I} b^{II} + ca^{I} b^{II} - ba^{I} c^{II} + bc^{I} a^{II} - cb\ a^{II}}$$

$$x = \frac{db^{I} c^{II} - dc^{I} b^{II} + cd^{I} b^{II} - bd^{I} c^{II} + bc^{I} d^{II} - cb^{I} d^{II}}{ab\ c^{II} - ac^{I} b^{II} + ca^{I} b^{II} - ba^{I} c^{II} + bc^{I} a^{II} - cb\ a^{II}}$$

Auf diese Weise lassen sich aus allen Zifferngleichungen zwischen drei Unbekannten durch bloße Substitution unter die eben abgeleiteten Formeln diese Unbekannten bestimmen.

Beispiele. 1) Aus

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x + 4y - 3z &= 4 \\ 3x - 5y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

worin $a = 1;\ b = -3;\ c = 2;\ d = 1;$
$a^{I} = 2;\ b^{I} = 4;\ c^{I} - = 3;\ d^{I} = 4;$
$a^{II} = 3;\ b^{II} = -5;\ c^{II} = 4;\ d^{II} = 7;$

findet sich

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= 4. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} 7x + 5y + 2z &= 79 \\ 8x + 7y + 9z &= 122 \\ x + 4y + 5z &= 55. \end{aligned}$$

Hier ist $a = 7;\ b = 5;\ c = 2;\ d = 79;$
$a^{I} = 8;\ b^{I} = 7;\ c^{I} = 9;\ d^{I} = 122;$
$a^{II} = 1;\ b^{II} = 4;\ c^{II} = 5;\ d = 55;$

folglich wird

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 9 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

3) Aus.

$$\begin{aligned} 3x - 9y + 8z &= 41 \\ -5x + 4y + 2z &= -20 \\ 11x - 7y - 6z &= 37 \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -3 \\ z &= +1. \end{aligned}$$

§. 28.

C) Bei mehr als drei Gleichungen zwischen mehr als drei Unbekannten.

Bei den Gleichungen zwischen vier, fünf und noch mehr Unbekannten geschieht die Elimination auf dieselbe Weise, wie bei denen mit dreien; z. B.

$$\begin{aligned} ax + by + cz + du &= e \\ a^{I}x + b^{I}y + c^{I}z + d^{I}u &= e^{I} \\ a^{II}x + b^{II}y + c^{II}z + d^{II}u &= e^{II} \\ a^{III}x + b^{III}y + c^{III}z + d^{III}u &= e^{III}. \end{aligned}$$

Wird die erste Gleichung mit m, die zweite mit m^{I}, die dritte mit m'' multiplizirt, werden dann die 3 Produkte addirt, und von der Summe die vierte Gleichung subtrahirt, so entsteht

$$x(am + a^{I}m^{I} + a''m'' - a''') + y(bm + b^{I}m^{I} + b''m'' - b''')$$
$$+ z(cm + c^{I}m^{I} + c''m'' - c''') + u(dm + d^{I}m^{I} + d''m'' - d''')$$
$$= em + e^{I}m^{I} + e''m'' - e'''.$$

Um jetzt z. B. u zu finden, setzen wir

$$am + a^{I}m^{I} + a''m'' = a'''$$
$$bm + b^{I}m^{I} + b''m'' = b'''$$
$$cm + c^{I}m^{I} + c''m'' = c'''$$

Hierdurch verschwinden x, y und z, und wir erhalten

$$u = \frac{em + e^{I}m^{I} + e''m'' - e'''}{dm + d^{I}m^{I} + d''m'' - d'''}$$

Freilich müssen aber jetzt, um für m, m^{I} und m'' die Werthe davon in a, b und c zu erhalten, die vorhergehenden Gleichungen, als drei Gleichungen zwischen drei Unbekannten (m, m^{I}, m'') aufgelöst werden.

Jedoch kann man auch die Werthe von x, y, z, u.... ohne alle Rechnung durch Anwendung der Lehre von den Versetzungen (Permutationen) auf die Größen a, b, c, d, e.... ableiten, wovon an einem andern Orte.

§. 29.

Noch einige Beispiele zur Uebung:

I.)
$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z = 187$$
$$y + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}z = 187$$
$$z + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y = 187.$$
$$x = 55$$
$$y = 121$$
$$z = 143.$$

II.)
$$x + \tfrac{1}{2}y = 5$$
$$x + \tfrac{1}{3}z = 5$$
$$z + \tfrac{1}{4}x = 5.$$

$$x = 3\tfrac{1}{5}$$
$$y = 3\tfrac{3}{5}$$
$$z = 4\tfrac{1}{5}$$

III.) $x + 3y + 2z = 23$
$$4x + 5y + 2z = 46$$
$$4x + 10y + 5z = 75$$
$$x = 5$$
$$y = 4$$
$$z = 3.$$

IV.) $7x + 5y + 2z = 28$
$$4x + 6y + 3z = 25,7.$$
$$9x + 12y + 6z = 53,4.$$
$$z = 1\tfrac{1}{2}$$
$$y = 2\tfrac{1}{5}$$
$$x = 2.$$

Dritter Abschnitt.

Von den Gleichungen des zweiten Grades.

A) Mit einer Unbekannten.

§. 30.

Lehrsatz. Eine jede Gleichung des zweiten Grades kann auf die Form
$$x^2 + Px + Q = o$$
gebracht werden.

Bew. Nach §. 13. ist die Form im Allgemeinen, wenn man $m = 2$ setzt,
$$x^2 + ax + b = o, \text{ eine Gleichung,}$$
welche bereits die verlangte Form hat, wenn man statt a und b die Buchstaben P und Q setzt.

Folg. 1. Setzt man $P = o$, so entsteht
$$x^2 + Q = o,$$

und dieß ist die Form einer jeden unvollständigen oder reinen Gleichung des zweiten Grades.

Folg. 2. Um jede gegebene Gleichung des zweiten Grades auf die angegebene Form zu bringen, darf man sie nur nach den im ersten Abschnitte angeführten Regeln reduziren und ordnen.

Z. B. $\frac{a + b}{x} = \frac{c\ x}{d - x}$ wird

$$x^2 + \left(\frac{a + b}{c}\right) x - \frac{d\ (a + b)}{c} = 0$$

§. 31.

Erklär. Ausdrücke von der Form

$$x - a = 0$$
$$x - b = 0 \text{ u. s. w.}$$

stellen geordnete Gleichungen des ersten Grades oder einfache Gleichungen vor. Der erste dieser Ausdrücke wird nur dann $= 0$, wenn $x = a$, der zweite, wenn $x = b$ u. s. w. ist.

Multiplizirt man, ohne einen besondern Werth von x vorauszusetzen, die Größen $x - a$, $x - b$ u. s. w. mit einander, so heißen dieselben in Beziehung auf das Produkt, einfache Faktoren.

§. 32.

Lehrsatz. Das Produkt von zwei einfachen Faktoren gibt eine quadratische Gleichung.

Bew. Denn

$$(x - a)\ (x - b) = x^2 \left.\begin{matrix} - a \\ - b \end{matrix}\right\} x + ab.$$

Folg. 1. Ein Produkt einfacher Faktoren wird immer $= 0$, wenn x so groß angenommen wird, als das Gegentheil von dem bekannten oder bestimmten Theile eines einfachen Faktors; nämlich $(x - a)\ (x - b)$ wird $= 0$, wenn entweder $x = + a$, oder $x = + b$ gesetzt wird.

2) Also gibt es für die Unbekannte einer Gleichung vom zweiten Grade zwei Werthe, welche die Gleichung auf

Null bringen; also hat jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln.

§. 32.

Lehrsatz. Ist $x = a$ die eine Wurzel der Gleichung

$$x^2 + P x + Q = o$$

so ist $x = - P - a$ die andere.

Bew. Denn wird $x^2 + P x + Q$ durch $x - a$ dividirt, so erhält man den Quotienten $x + P + a$, und den Rest $a^2 + P a + Q$.

Da nun a eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, (ex hyp.) so muß

$$a^2 + P a + Q = o \text{ seyn;}$$

folglich ist $x + P + a$ der vollständige Quotient, und man hat daher auch

$$x^2 + P x + Q = (x - a)(x + P + a)$$

Da aber $x^2 + P x + Q = (x - a)(x + P + a)$ auch gleich Null wird, wenn man

$$x + P + a = o \text{ oder}$$
$$x = - P - a \text{ nimmt, so folgt,}$$

daß nebst $x = a$ auch $x = - P - a$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 + P x + Q = o$ seyn muß, und daß es ausser diesen beiden keine andere Wurzel geben kann.

Z. B. Wenn $x = 7$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 - 10 x + 21 = o$ ist, so ist auch $x = - P - a$ d. i. $+ 10 - 7 = + 3$, eine Wurzel, und man hat die identische Gleichung

$$x^2 - 10 x + 21 = (x - 7)(x - 3.)$$

§. 33.

Lehrsatz. Der Coeffizient des zweiten Gliedes ist gleich der Summe der beiden Wurzeln, aber mit entgegengesetztem Zeichen; und das letzte Glied ist dem Produkte der Wurzeln gleich; d. i. wenn a und b die Wurzeln der Gleichung $x^2 + P x + Q = o$ sind, so ist

$$a + b = - P \text{ und,}$$
$$a b = Q.$$

Bew. Wenn die zwei Wurzeln a und b sind, so hat man nach §. 32. at, b = — P — a, mithin a + b = P.

Ferner ist $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$
$= x^2 + Px + ab;$
dieses Produkt muß aber $x^2 + Px + Q$ seyn, folglich ist $ab = Q$.

Folg. Aus den Zeichen der beiden Wurzeln kann man daher leicht auf die Zeichen von P und Q schließen.

Sind nämlich a und b beide positiv, oder beide negativ, so hat P das entgegengesetzte Zeichen, Q aber ist positiv; haben aber a und b verschiedene Zeichen, so ist Q negativ, und P hat das Zeichen der kleinern Wurzel.

Und umgekehrt kann man aus den Zeichen von P und Q auf die Zeichen der zwei Wurzeln schließen, wenn diese sonst möglich sind.

Ist nämlich Q positiv, so haben a und b gleiche, und zwar dem Zeichen von P entgegengesetzte Zeichen; ist aber Q negativ, so müssen a und b verschiedene Zeichen haben, und zwar gibt P das Zeichen der kleinern Wurzel an.

§. 34.

Aufg. Eine vollständige Gleichung des zweiten Grades aufzulösen.

Auflös. Man bringe sie zuerst auf die Form
$$x^2 + Px + Q = 0;$$
dann sind die beiden Wurzeln:
$$x = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$$

I.) Bew. Aus $x^2 + Px + Q = 0$ folgt
$$x^2 + Px = -Q.$$

Da man ohne Störung der Gleichung zu beiden Seiten das Quadrat der Hälfte des Coeffizienten des zweiten Gliedes, oder die Größe $\frac{1}{4}P^2$ addiren kann, so erhält man
$$x^2 + Px + \frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}P^2 - Q,$$
wodurch der erste Theil $x^2 + Px + \frac{1}{4}P^2$ der Gleichung

ein vollkommenes Quadrat oder gleich $(x + \frac{1}{2} P)^2$ geworden ist, so daß man hat

$$(x + \tfrac{1}{2} P)^2 = \tfrac{1}{4} P^2 - Q, \text{ folglich}$$
$$x + \tfrac{1}{2} P = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} P^2 - Q)} \text{ oder}$$
$$x = - \tfrac{1}{2} P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} P^2 - Q)}.$$

Dieser Ausdruck von x gibt daher die gesuchten beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Das doppelte Zeichen steht hier, weil jede positive sowohl als auch jede negative Zahl, wenn sie zur zweiten Potenz erhoben wird, immer ein positives Produkt gibt, folglich umgekehrt die Quadratwurzel einer positiven Zahl immer zwei gleiche und in ihren Zeichen entgegengesetzte Werthe haben muß.

Einwurf. Demnach müßten ja auch der Quadratwurzel von $(x + \frac{1}{2} P)^2$ doppelte Zeichen zukommen; dieß gäbe

$$\pm (x + \tfrac{1}{2} P) = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} P^2 - Q)}$$

woraus man $+ x = - \frac{1}{2} P + \sqrt{(\frac{1}{4} P^2 - Q)}$

und $- x = + \frac{1}{2} P - \sqrt{(\frac{1}{4} P^2 - Q)}$

folgern könnte, und dadurch fiele der eine Werth von x weg, weil die zweite Gleichung nichts weiter ist, als die erste, multiplizirt mit $- 1$.

Lösung dieses Einwurfs:

Aus der Gleichung $\pm (x + \frac{1}{2} P) = \pm \sqrt{(\frac{1}{4} P^2 - Q)}$ würde keineswegs blos $+ (x + \frac{1}{2} P) = + (\sqrt{\frac{1}{4} P^2 - Q})$

und $- (x + \frac{1}{2} P) = - (\sqrt{\frac{1}{4} P^2 - Q})$ folgen, sondern auch noch $+ (x + \frac{1}{2} P) = - \sqrt{(\frac{1}{4} P^2 - Q)}$ und

$$- (x + \tfrac{1}{2} P) = + \sqrt{(\tfrac{1}{4} P^2 - Q)},$$

allein die zweite Gleichung ist so viel wie die erste, und die vierte so viel, wie die dritte, wenn man nur die Zeichen ändert, man kömmt also doch wieder auf

$$+ (x + \tfrac{1}{2} P) = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} P^2 - Q)} \text{ zurück.}$$

Auch auf folgende Weise läßt sich dieß zeigen:

Es sey $x^2 = 16$; so ist

$$x^2 = 4^2$$

$$x^2 - 4^2 = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0.$$

Diese Gleichung ist aber richtig für

$x - 4 = 0$ und

für $x + 4 = 0$; d. i.

für $+ x = + 4$ und

für $+ x = - 4$, also ist

$$+ x = \pm 4.$$

II.) Ein anderer Beweis:

Die beiden Wurzeln von $x^2 + Px + Q = 0$ seyen a und b, und $a - b$ gebe einen positiven Unterschied.

Aus §. 33. ist $a + b = - P$

und $ab = Q$;

mithin $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$

$= P^2 - 4Q$; folglich

$$a - b = \sqrt{(P^2 - 4Q)}.$$

Aus $a + b = - P$ und

$a - b = \sqrt{(P^2 - 4Q)}$ aber findet man

$$a = -\frac{P}{2} + \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)} \text{ und}$$

$$b = -\frac{P}{2} - \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}.$$

Folg. Man kann daher die zwei Wurzeln einer jeden Gleichung vom zweiten Grade ohne besondere Auflösung dieser Gleichung blos durch Substitution unter die eben gefundenen Formeln finden.

§. 35.

Folgerungen in Betreff der Beschaffenheit der Wurzeln.

1) Ist Q positiv und $Q > \frac{1}{4} P^2$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4} P^2 - Q)}$ unmöglich; folglich sind die beiden Wurzeln imaginär oder unmöglich.

Z. B. $x^2 + 2x + 3 = 0$

gibt $x = - 1 \pm \sqrt{-2}$.

Aus $x^2 - 2x + 3 = 0$
findet man $x = 1 \pm \sqrt{-2}$.

Es gibt daher keine Zahl, welche den gegebenen Gleichungen Genüge leisten könnte, sondern dieß bewirken nur die beiden Zahlformen
$-1 \pm \sqrt{-2}$ und $1 \pm \sqrt{-2}$.

2) Ist Q positiv, und $Q = \frac{1}{4} P^2$, so wird

$$x = -\frac{P}{2} + 0.$$

In diesem Falle hat die Gleichung nicht zwei verschiedene Wurzeln, sondern nur die einzige $= -\frac{P}{2}$.

Z. B. $x^2 - \frac{3}{5} x + \frac{9}{100} = 0$,

gibt $x = -\frac{3}{10} + \sqrt{\left(\frac{9}{100} - \frac{9}{100}\right)} = -\frac{3}{10}$.

In einem solchen Falle werden auch die beiden einfachen Faktoren einander gleich; denn

$$\left(x + \frac{3}{10}\right)\left(x + \frac{3}{10}\right) = x^2 - \frac{3}{5} x + \frac{9}{100}.$$

3) Ist Q negativ, oder auch $Q < \frac{P^2}{4}$

so wird $\sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$ möglich. Man findet dann zwei mögliche, von einander verschiedene Werthe von x.

Zusatz. Bei der Auflösung einzelner gegebener Gleichungen ist es bequemer, die Form $x^2 = Px + Q$ anzunehmen, weil daraus

$$x = \frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)} \text{ folgt,}$$

wobei man in den Werthen von x die Zahlen P und Q sogleich mit denjenigen Zeichen anwenden darf, welche sie in der Gleichung $x^2 = Px + Q$ haben.

Beispiele zur Uebung:

1) Aus $7x^2 - 11x - 13 = 0$ folgt

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{485}}{14}$$

2) Aus $3x^2 + 7x + 4 = 0$ folgt

$$x = \frac{-7+1}{6} = \text{[illegible]};$$

und $x = \frac{-7-1}{6} = -\frac{4}{3}$.

§. 36.

Lehrsatz. Alle jene Gleichungen, die zwar den zweiten Grad übersteigen, sich aber auf die Form

$$x^{2m} + Px^m + Q = 0$$

bringen lassen, können wie Gleichungen des zweiten Grades aufgelöst werden.

Man erhält nämlich

$$x = \sqrt[m]{\left\{-\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}\right\}}$$

Bew. Dadurch daß man $x^m = u$ also $x^{2m} = u^2$ setzt, verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$u^2 + Pu + Q = 0$, folglich wird

$$u = -\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)} \text{ oder}$$

$$x^m = -\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}, \text{ folglich}$$

$$x = \sqrt[m]{\left\{-\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}\right\}} = \sqrt[m]{u}$$

Folg. Ist m ungerade, so gibt jeder mögliche Werth von u Einen möglichen Werth von x; ist hingegen m gerade, so geben nur die positiven Werthe von u mögliche Werthe von x, und zwar jederzeit zwei, nur in den Zeichen verschiedene; die negativen Werthe von u geben unmögliche Werthe für x.

Beispiele.

I.) $3x^6 + 5x^3 - 42 = 0$ wird, für $x^3 = u$,
$3u^2 + 5u - 42 = 0$, woraus

$u = 3$ und

$u = -\frac{14}{3}$.

Diese Werthe in $x^3 = u$ substituirt, geben

$x = \sqrt[3]{3}$ und

$x = -\sqrt[3]{\frac{14}{3}}$

II.) $3x^4 + 5x^2 - 42 = 0$ gibt

$u = 3$ und

$u = -\frac{14}{3}$;

aber dann ist $x = \pm\sqrt{3}$ und

$x = \pm\sqrt{-\frac{14}{3}}$, wovon

nur die zwei ersten Werthe möglich sind.

III. Man soll zwei Zahlen suchen, deren Produkt 6, und deren Summe der Cuben 36 ist.

1) $xy = 6$

2) $x^3 + y^3 = 35$.

Die Gleichung 1) gibt $y = \frac{6}{x}$; wird dieß in der zweiten substituirt, und diese dann geordnet, so erhält man

$x^6 - 35x^3 + 216 = 0$.

$x = \sqrt[3]{\frac{35}{2} \pm \frac{19}{2}} = \sqrt[3]{27}$ und $\sqrt[3]{8}$.

$x = \sqrt{3}$

und $x = 2$.

Daher $y = 2$ und

$y = 3$.

Anmerk. Es ist nicht einmal nothwendig, daß in der Form

$x^{2m} + Px^m + Q = 0$

m eine ganze Zahl sei, weil man für $x^m = u$ die beiden Werthe von u aus der Gleichung

$$u^2 + Pu + Q = 0$$

finden, und durch ihre Substitution in $x^m = u$ daraus die Werthe von x erhalten kann, wenn auch m eine gebrochene Zahl sein sollte.

Z. B. $3x^{\frac{4}{3}} - 8x^{\frac{2}{3}} - 3 = 0$ wird

für $x^{\frac{2}{3}} = u$

$3u^2 - 8u - 3 = 0$;

woraus $u = 3$ und

$u = -\frac{1}{3}$

Nun folgt aus $x^{\frac{2}{3}} = 3$

$x^2 = 27$

und $x = \pm \sqrt{27}$;

aus $x^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}$ aber wird

$x = \sqrt{-\frac{1}{27}}$ gefunden;

daher hat die gegebene Gleichung nur die beiden möglichen Resultate

$$x = \pm \sqrt{27}.$$

§. 37.

Lehrsatz. Die Gleichungen von der Form

$$x^m + Px^{m-n} + Qx^{m-2n} = 0$$

lassen sich ebenfalls, wie Gleichungen des zweiten Grades auflösen.

Bew. $x^m + Px^{m-n} + Qx^{m-2n} = x^{m-2n}(x^{2n} + Px^n + Q)$; demnach muß

entweder $x^{m-2n} = 0$

oder $x^{2n} + Px^n + Q = 0$ sein.

Daher enthält die gegebene Gleichung die Wurzeln der zwei eben angeführten Gleichungen.

Z. B. $5x^5 - 11x^3 + 2x = 0$

hat die Wurzeln

$$x = 0$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$
$$\text{und } x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

§ 38.

Aufgabe. Eine reine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Wird in der allgemeinen Form $x^2 + Px + Q = 0$, $P = 0$ gesetzt, so ist $x^2 + Q = 0$ die Form für jede reine quadratische Gleichung; folglich

$$x = \pm\sqrt{-Q}.$$

Die zwei Wurzeln sind also hier bloß in den Zeichen verschieden, und sind beide möglich, wenn Q negativ ist, sonst beide unmöglich.

1) $3x^2 - 588 = 0$

$x = \pm 14$, und beide Wurzeln möglich.

2) $x^2 + 6 = 0$

$x = \pm\sqrt{-6}$, und beide unmöglich.

3) $x^2 - 8 = 0$

$x = \pm\sqrt{8}$, eine Irrationalzahl, woraus sich die Wurzel wenigstens durch Annäherung finden läßt, nämlich

$$x = 2\sqrt{2} = 2,8284272\ldots\ldots$$

4) $4x^2 + 18 = 94 - \frac{3x^2}{4}$ gibt

$$x = \pm 4.$$

§. 39.

Lehrsatz. Die imaginären Wurzeln der Gleichungen des zweiten Grades lassen sich unter die Form $A \pm B\sqrt{-1}$ bringen.

Bew. Man darf nur in der Formel

$$x = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$$

$$\frac{P^2}{4} - Q = -B^2$$ setzen, weil $Q > \frac{P^2}{4}$ seyn muß,

und $-\frac{P}{2} = A$, so entsteht

$$x = A \pm \sqrt{-B^2}$$ oder

$$x = A \pm B\sqrt{-1}.$$

§. 40.

Aufgabe. Eine vollständige Gleichung des zweiten Grades auf die Form einer unvollständigen oder reinen zu bringen.

Aufl. Man setze in der Gleichung

$$x^2 + Px + Q = o$$

$x = y - \frac{1}{2}P$, so entsteht

$$x^2 = y^2 - Py + \tfrac{1}{4}P^2$$
$$Px = \quad + Py - \tfrac{1}{2}P^2$$
$$Q = \qquad\qquad + Q$$

folglich

$$x^2 + Px + Q = y^2 - \tfrac{1}{4}P^2 + Q. = o.$$

Beweis. Man setze in der Gleichung

$$x^2 + Px + Q = o$$

anstatt x die Summe einer andern Unbekannten y und einer willkührlichen Zahl m, d. h.

$$x = (y + m)$$

so wird aus der gegebenen Gleichung

$$y^2 + \left.\begin{matrix}2m\\+P\end{matrix}\right\} y \begin{matrix}+m^2\\+Pm+Q\end{matrix}$$

soll nun das Glied, welches y enthält, verschwinden, so muß $2m + P = o$ seyn,

oder $m = -\frac{P}{2}$ genommen

folglich $x = \left(y - \frac{P}{2}\right)$ gesetzt werden.

Beispiel. Aus $x^2 - 6x + 5 = o$

wird, wenn man $x = y - 3$ setzt,

$$y^2 - 4 = o.$$

Folg. Daraus entspringt eine eigne Methode, die vollständigen Gleichungen des zweiten Grades aufzulösen. Nämlich:

Man bringe durch Wegschaffung des zweiten Gliedes die vollständige Gleichung des zweiten Grades auf die Form einer reinen Gleichung desselben Grades;

diese löse man dann auf nach §. 38, und aus den gefundenen Werthen der eingeführten Unbekannten (y) bestimme man die Werthe der angegebenen Unbekannten (x).

Aus $x^2 + P x + Q = 0$

wird $y^2 - \frac{1}{4} P^2 + Q = 0$, folglich

$y = \pm \sqrt{(\frac{1}{4} P^2 - Q}$.

Da $x = y - \frac{1}{2} P$ gesetzt wurde,

so ist $x = - \frac{1}{2} P \pm \sqrt{(\frac{1}{4} P^2 - Q)}$,

übereinstimmend mit §. 34.

Beispiel. Aus $x^2 - 6x + 5 = 0$ wird

$y^2 - 4 = 0$, folglich

$y = \pm 2$, und

$x = + 3 \pm 2$.

§. 41.

Eine Anwendung der Lehre von den Gleichungen des zweiten Grades ergibt sich in der

Aufg. Einen Ausdruck von der Form

$$A x^2 + B x + C$$

in Faktoren zu zerlegen.

Aufl. Man setze den gegebenen Ausdruck gleich Null, und suche die beiden Wurzeln a und b der Gleichung $0 = A x^2 + B x + C$, dann ist

$$A (x - a) (x - b) = A x + B x + C.$$

Bew. $A x^2 + B x + C = \left(x^2 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A}\right) A = 0.$

Nun ist $x^2 + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} = (x - a) (x - b) A = 0$

folglich $A x^2 + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} = (x - a)(x - b) A.$

Beispiel. Um $14 x^2 + 51 x - 72$ in Faktoren aufzulösen, suche man die Wurzeln der Gleichung $14 x^2 + 51 x - 72 = 0$. Diese sind

$$x = \frac{6}{7}.$$

und $x = -\frac{9}{2}$ mithin ist, was auch x sei,

$$14\left(x^2 + \frac{51}{14} x - \frac{72}{14}\right) = 14\left(x - \frac{6}{7}\right)\left(x + \frac{9}{2}\right)$$
$$= (7 x - 6)(2 x + 9).$$

Eben so findet man

$$2 a^2 - 4 a + 1 = 2\left(a - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\left(a - 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$
$$= (a\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1)(a\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1)$$

B. Gleichungen des zweiten Grades mit zwei und mehreren Unbekannten.

§. 42.

Aufg. Gleichungen des zweiten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten aufzulösen.

Aufl. Auch bei diesen Gleichungen müssen die Unbekannten bis auf Eine weggeschaft werden, zwar gibt es hiezu eine eben so allgemeine Eliminationsmethode, wie für die Gleichungen des ersten Grades, von welcher wir aber hier keine Anwendung machen können, weil sie wohl zuletzt auf eine Gleichung führt, die nur Eine Unbekannte enthält, die aber den zweiten Grad übersteigt, wozu also die Auflösung der höhern Gleichungen bekannt seyn müßte.

Ich beschränke mich daher darauf, hier einige solcher Gleichungen beispielsweise, nicht sowohl nach allgemeinen Regeln aufzulösen, als vielmehr durch ein Verfahren, wie es die eben vorliegende Gleichung als das bequemste und zweckdienlichste darbietet.

I.) 1) $x + y = 2(x - y)$

2) $xy = 12(x - y)$

Aus 1) folgt $-x = -3y$

$$x = 3y$$

Wird dieser Werth in 2) gesetzt, so erhält man

$$3y^2 = 12(3y - y)$$

$$y = 8$$

woraus $x = 24$ folgt.

Hier wurde der Werth der einen Unbekannten aus der einen Gleichung gesucht, und in der andern substituirt. Allein diese Eliminationsmethode ist nicht immer anwendbar, sondern führt oft auf Gleichungen, die den zweiten Grad übersteigen, wie z. B.

II.) 1) $xy = 255$

2) $x^2 + y^2 = 514$

Aus 1) wird $x = \frac{255}{y}$, und dieß in 2) substituirt, gibt

$$65025 + y^4 = 514\,y^2,$$

Die Gleichung 1) gibt auch $2xy = 510$

folglich ist dann in $x^2 + y^2 + 2xy = 1024$

die erste Seite ein vollständiges Quadrat

also 3) $x + y = 32$.

Eben so wird durch Subtraktion

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4$$

4) $x - y = 2$.

Aus 3) und 4) wird $x = 17$ und

$y = 15$.

III.) 1) $x^2 + y^2 - x - y = 78$

2) $xy + x + y = 39$

Die Gleichung 2) mit 2 multiplizirt, und zu 1) addirt, gibt $x^2 + y^2 - x - y + 2xy + 2x + 2y = 156$, oder

3) $(x + y)^2 + x + y = 156$

Die Gleichung 2) mit 2 multiplizirt, und von 1) abgezogen,

gibt 4) $(x - y)^2 = 3(x + y)$.

Die Gleichung 3) als vollständige quadratische Gleichung aufgelöst, indem man $x + y$ als eine eintheilige Größe betrachtet, gibt

$$5)\quad x + y = 12$$

Dieser Werth in die Gleichung 4) gesetzt, gibt

$$(x - y)^2 = 36$$

$$6)\quad x - y = 6$$

Aus 5) und 6) wird

$$x = 9 \text{ und}$$

$$y = 3.$$

IV.) 1) $x^2 - y^2 + 2x = 34$

2) $2x^2 + 2y^2 - 2x = 42.$

Die Gleichung 1) mit 2 multiplizirt, und zur zweiten addirt, gibt

$$4x^2 + 2x = 110$$

woraus folgt $x = 5$

$y = 1.$

V.) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe, und Differenz ihrer Quadrate gleich ist.

D. i. 1) $x^2 - y^2 = x + y$

2) $xy = x + y.$

Auflösung. Man suche aus der ersten Gleichung durch Zerlegung in Faktoren den Werth von x, und setze ihn in die zweite.

Aus 1) wird nämlich $(x + y)(x - y) = x + y$

$$x - y = 1$$

$$x = y + 1$$

folglich wird die zweite $(y + 1)y = y + 1 + y$

oder $y^2 - y = 1$

folglich $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

und daher $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Probe. $x + y = 2 \pm \sqrt{5}$
$xy = 2 \pm \sqrt{5}$
$x^2 - y^2 = 2 \pm \sqrt{5}$. } Die Berechnung dieser Ausdrücke zur Selbstübung.

VI.) 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 104$

2) $y^2 = 2xz + 4$

3) $100z + 10y + x = 100x + 10y + z$

Aus 3) wird $x = z + 6$, dieß in 1) und 2) substituirt

gibt 4) $z^2 + 12z + 36 + y^2 + z^2 = 104$

und 5) $y^2 = 2z^2 + 12z + 4$

folglich 6) $2z^2 + 12z + 30 = 104 - 2z^2 - 12z - 4$.

woraus sich $z = -3 + \sqrt{25}$ findet, daher

$x = 8$

$y = 6$.

VII.) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe, Produkt und Summe ihrer Quadrate gleich ist.

Auflös. Man setze $x = a + b$

$y = a - b$, so wird

1) $x + y = 2a$

2) $xy = a^2 - b^2$

3) $x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2$

Aus 1) und 2) ist $2a = a^2 - b^2$

oder $b^2 = a^2 - 2a$

dieß in 3) substituirt gibt 4) $x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a$

Aus 4) und 1) wird $2a = 4a^2 - 4a$

oder $\frac{3}{2} = a$; folglich

wird aus $b^2 = a^2 - 2a$

$b^2 = \frac{9}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{3}{4}$

$b = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Also $x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$

$y = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$

Probe (zur Selbstübung.)

$$x + y = 3$$
$$x\,y = 3$$
$$x^2 + y^2 = 3.$$

VIII.) 1) $x^3 - y^3 = D$

2) $x - y = d$

Wenn man 1) durch 2) dividirt, so entsteht

3) $x^2 + xy + y^2 = \frac{D}{d}$; aus 2) wird aber

4) $x^2 - 2\,xy + y^2 = d^2$.

$\quad - \;+ \qquad - \qquad -$

folglich $3\,x\,y = \frac{D - d^3}{d}$

$$y = \frac{D - d^3}{3\,d\,x};$$ dieß in 2) substituirt

gibt 5) $x + \frac{d^3 - D}{3\,d\,x} = d$

oder $x^2 - d\,x = \frac{D - d^3}{3\,d}$

folglich $x = \frac{d + \sqrt{}}{2}\left\{\frac{4\,D - d^3}{3\,d}\right\}$

$$y = \frac{-d + \sqrt{}}{2}\left\{\frac{4\,D - d^3}{3\,d}\right\}$$

Es sey $D = 19\,46$

und $d = 2$; so wird

$$x = \frac{2 + \sqrt{}}{2}\left(\frac{7776}{6}\right) = 19$$

$$y = \frac{-2 + 36}{2} = 17.$$

X.) 1) $x^2 - y^2 = d$

2) $x\,y = p$

Aus 2) ist $y = \frac{p}{x}$ dieß in 1) gesetzt,

gibt 3) $x^2 - \frac{p^2}{x^2} = d^2$

$$x^4 - p^2 = d x^2$$

$$x^4 - dx^2 = p^2$$

$$x^2 = \frac{d + \sqrt{4 p^2 + d^2}}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\left\{\frac{d + \sqrt{4 p^2 + d^2}}{2}\right\}}$$

Für $p = 143$ und
$d = 48$ wird
$x = 13$ und
$y = 11$.

§. 43.

Eine Anwendung der Lehre von den Gleichungen des zweiten Grades macht man auch bei Ausziehung der Quadratwurzel aus irrationalen Binomien, oder bei Lösung der

Aufgabe. $\sqrt{(a \pm \sqrt{b})}$ in zwei Theile von der Form $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ zu zerlegen.

Auflös. Unter der Bedingung, daß $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat ist, hat man

$$\sqrt{(a + \sqrt{b})} = \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} \sqrt{(a^2 - b)}\right\}} \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} \sqrt{(a^2 - b)}\right\}}$$

$$\sqrt{(a - \sqrt{b})} = \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} \sqrt{(a^2 - b)}\right\}} + \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} \sqrt{(a^2 - b)}.\right\}}$$

Bew. Offenbar ist

$$\sqrt{(a + \sqrt{b})} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

$$a + \sqrt{b} = (x + y) + 2 \sqrt{xy}.$$

In diesem Ausdrucke kann man zuerst die beiden rationalen Glieder, und dann auch die beiden irrationalen einander gleich setzen, d. h. man erhält

1) $a = x + y$ oder
$x = a - y$; und
2) $\sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$
$xy = \frac{1}{4} b$
$$x = \frac{b}{4y};$$
werden die beiden Werthe von x einander gleichgesetzt, so erhält man

3) $a - y = \frac{b}{4y}$ oder
$4ay - 4y^2 = b$
$$y^2 - ay = -\frac{b}{4},$$
woraus $y = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - b)}}{2}$, folglich
$$x = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - b)}}{2} \text{ wird.}$$

Man hat also
$$\sqrt{(a + \sqrt{b})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} =$$
$$\pm\sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}\right\}} \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}\right\}}$$
Setzt man dann $\sqrt{(a - \sqrt{b})} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, und wiederholt die Rechnung, so erhält man auch den Werth für $\sqrt{(a - \sqrt{b})}$.

Beispiele: I.) $\sqrt{(12 + 2\sqrt{35})} = \sqrt{(12 + \sqrt{140})}$.
Es ist $a^2 - b = 4$;
und $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)} = 1$; folglich
$$\sqrt{(12 + 2\sqrt{35})} = \pm\sqrt{(6 + 1)} \pm \sqrt{(6 - 1)}.$$
II.) $\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})} = \sqrt{(11 - \sqrt{72})}$.
Es ist $a^2 - b = 49$;
und $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)} = \frac{7}{2}$; folglich
$$\sqrt{(12 - 6\sqrt{2})} = \pm 3 \mp \sqrt{2}.$$

III.) $\sqrt{(16+30\sqrt{-1})} = \sqrt{(16+\sqrt{-900})}$.

Es ist $a^2 - b = 1156 = 2^2 . 17^2$;

und $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)} = \frac{1}{2}. 2. 17 = 17$; folglich

$$\sqrt{(16+30\sqrt{-1})} = \pm\sqrt{(8+17)} \pm \sqrt{(8-17)}$$
$$= \pm 5 \pm \sqrt{-9}.$$
$$= \pm 5 \pm 3\sqrt{-1}.$$

IV. Aus $\sqrt{(15-6\sqrt{6})}$ wird

$\pm 3 \mp \sqrt{6}$

V. $\sqrt{(7+6\sqrt{-2})}$ wird $\pm 3 \pm \sqrt{-2}$.

VI. $\sqrt{6\sqrt{-9}}$. Hier ist $a = o$;

und $b = -324$

$-b = 324$

$a^2 - b = 324$; und man

erhält $\pm 3 \pm \sqrt{-9}$.

Vierter Abschnitt.

Von den höhern Gleichungen.

---

§. 44.

Von den höhern Gleichungen sollen hier nur die reinen höhern Gleichungen abgehandelt werden, d. h. jene, welche nur Eine Potenz der Unbekannten enthalten. Ihre Form wird daher seyn

$$x^m + \frac{P}{Q} = o.$$

Z. B. Es sey die reine Gleichung gegeben

$$ax^m + a^r b^n = a^n b^r - b x^m;$$

aus ihr wird $x^m = \frac{a^n b^r - a^r b^n}{a+b}$, also

$$P = -(a^n b^r - a\ b^n)$$

und $Q = a + b.$

Folglich läßt sich jede reine Gleichung unter die Form $x^m + \frac{P}{Q} = 0$ bringen.

§. 45.

Aufg. Eine reine Gleichung aufzulösen.

Auflös. und Bew. $x = -\frac{P}{Q}$

folglich $x = \sqrt[m]{-\frac{P}{Q}}.$

Folg. Ist m ungerade, so hat man für x immer einen, jedoch immer nur einen möglichen Werth $x = \sqrt[m]{-\frac{P}{Q}}$; ist aber m gerade, so erhält x gar keinen möglichen Werth, wenn $-\frac{P}{Q}$ negativ ist, im entgegengesetzten Falle findet man für x zwei Werthe $x = \pm \sqrt[m]{-\frac{P}{Q}}.$

Beispiele. I.) $3x^5 - 96 = 0$ gibt

$$x = \sqrt[5]{32} = 2.$$

II.) $7x^4 + 567 = 0$ gibt

$x = \sqrt[4]{-81}$, also keinen möglichen Werth.

III.) $7x^4 - 567 = 0$ aber gibt

$$x = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3.$$

IV.) $\frac{x^4}{25} = 625\ x$ gibt

$$x^3 = 15625$$

$$x = 25.$$

Zuweilen lassen sich Gleichungen, die auf den ersten

Anblick ziemlich verwickelt scheinen, auf reine zurückführen, wie im folgenden Beispiele.

V.) Die Summe der Jahre zweier Brüder mit der Summe der Quadrate ihrer Jahre multiplizirt, gibt 580; und die Differenz ihrer Jahre mit der Differenz der Quadrate ihrer Jahre multiplizirt, gibt 160. Wie alt ist jeder?

Nennen wir die halbe Summe der Jahre beider Brüder x, und die halbe Differenz y, so ist der ältere x + y, und der jüngere x — y Jahre alt; demnach

1) $(x + y + x - y)\{(x + y)^2 + (x - y)^2\} = 580$

oder $2x\ (2x^2 + 2y^2) = 580$

oder $4x^3 + 4xy^2 = 580$ (A)

und 2) $(x + y - x + y)\{(x + y)^2 - (x - y)^2\} = 160$

oder $2y.\ 4xy = 160$

$8xy^2 = 160.$ (B)

Man multiplizire (A) mit zwei, und ziehe davon (B) ab, so entsteht

$$8x^3 = 1000$$
$$x = 5.$$

Dieser Werth in (B) substituirt, gibt

$$y^2 = 4$$
$$y = 2.$$

also $x + y = 7$

$x - y = 3.$

§. 46.

Lehrsatz. Die höhern Gleichungen von der Form

$$x^m + \frac{P}{Q} x^{m-n} = o$$

lassen sich auch wie die reinen Gleichungen auflösen.

Bew. $x^m + \frac{P}{Q} x^{m-n} = o = x^{m-n}\left(x^n + \frac{P}{Q}\right)$

folglich muß entweder $x^{m-n} = o$

oder $x^n + \frac{P}{Q} = o$ seyn.

Folglich enthält die gegebene Gleichung die Wurzel $x = 0$, und überdieß die Wurzeln der Gleichung $x^n + \frac{P}{Q} = 0$.

Z. B. $5\,x^7 - 150\,x^3 = 0$
gibt $x = 0$ und $x = \pm\sqrt[4]{30}$.

Dritte Abtheilung.

Die Lehre

von den

Verhältnissen, Proportionen, Progressionen und Logarithmen.

Erster Abschnitt

Von den Verhältnissen.

§. 1.

Erklär. 1) Ein Verhältniß ist die Vergleichung zweier Größen, in Bezug auf ihren Unterschied oder Quotienten.

Man kann nämlich fragen, entweder um viele Einheiten, oder um wie vielmal die eine Größe größer oder kleiner sey, als die andere.

Die Vergleichung durch Subtraktion heißt arithmetisches, die durch Division geometrisches Verhältniß.

2) Die Größen, welche das Verhältniß bilden, heißen Glieder, das voranstehende heißt Vorderglied, das nachstehende Hinterglied.

3) Das Zeichen für das arithmetische Verhältniß ist (—); für das geometrische (:); z. B. a — b und a : b.

4) Der durch das Verhältniß bestimmte Unterschied oder Quotient heißt Verhältnißzeiger.

Folg. 1) Die Größen, welche verglichen werden, müssen gleichartig seyn; denn beim arithmetischen Verhältnisse werden sie von einander abgezogen; ungleichartige Größen aber lassen sich nicht abziehen; eben so müssen sie beim geometrischen Verhältnisse gleichartig seyn, da hier

die eine Größe aus der andern, oder aus einem aliquoten Theile derselben erzeugt ist.

2) Die Größe des Verhältnisses ist durch die Größe des Verhältnißzeigers bestimmt; daher

sind Verhältnisse gleich oder ungleich, je nachdem ihre Verhältnißzeiger gleich oder ungleich sind; daher

werden Verhältnisse, welche dem nämlichen dritten gleich sind, auch unter sich gleich seyn.

3) Beim arithmetischen Verhältnisse a — b zieht man, um den Unterschied zu bestimmen, das Vorderglied vom Hintergliede ab; daher ist

$$b - a = d; \text{ folglich}$$
$$a = b - d$$
$$b = a + d.$$

Daher ist die allgemeine Form eines jeden arithmetischen Verhältnisses

$$a - (a + d).$$

Beim geometrischen Verhältnisse a : b dividirt man, um den Quotienten zu bestimmen, das Hinterglied durch das Vorderglied; daher ist

$$\frac{b}{a} = q; \text{ folglich}$$
$$b = aq \text{ und}$$
$$a = \frac{b}{q}.$$

Daher ist die allgemeine Form eines jeden geometrischen Verhältnisses

$$a : aq.$$

§. 2.

Erklär. Das geometrische Verhältniß heißt rational, oder irrational, je nachdem der Verhältnißzeiger desselben eine Rational= oder Irrationalzahl ist.

Im rationalen Verhältnisse heißen die zwei Glieder commensurable Größen, weil das eine durch das andere,

oder durch einen aliquoten Theil desselben gemessen werden kann; im irrationalen Verhältnisse aber heissen sie **incommensurable Größen.**

§. 3.

Lehrsatz. Werden die Vorderglieder und Hinterglieder mehrerer gleichen geom. Verhältnisse addirt oder subtrahirt, so ist das Verhältniß der Summen oder Unterschiede den einzelnen gegebenen Verhältnissen gleich.

Bew. Es seyen die gleichen Verhältnisse

$a : aq =$
$b : bq =$
$c : cq$ u. s. w. gegeben,

so ist das Verhältniß der Summen oder Unterschiede der Glieder

$$a \pm b \pm c \ldots : aq \pm bq \pm cq \ldots,$$

der Quotient desselben wird

$$\frac{(a \pm b \pm c \ldots)\, q}{a \pm b \pm c \ldots} = q$$

d. i. dem Quotienten der einzelnen Verhältnisse gleich; folglich ist auch das Verhältniß der Summen oder Unterschiede der Glieder jedem der einzelnen gegebenen Verhältnisse gleich.

§. 4.

Lehrs. Das geometrische Verhältniß zweier Zahlen wird nicht geändert, wenn man Vorder- und Hinterglied durch einerlei Zahl multiplizirt oder dividirt; d. i.

$$a : b = ma : mb = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}.$$

Bew. Denn durch dieses Verfahren wird der Quotient nicht geändert; es sey nämlich q der Quotient von $a : b$, so ist

$$q = \frac{b}{a}$$

Der Quotient von am : bm ist $\frac{bm}{am} = \frac{b}{a} = q$, und der Quotient von $\frac{a}{m} : \frac{b}{m}$ ist auch $\frac{b:m}{a:m} = \frac{b}{a} = q$.

Folg. 1) Daher ist das Verhältniß zweier Brüche, welche einerlei Namen haben, dem Verhältnisse ihrer Zähler gleich; d. i.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd} = a\,d : c\,b.$$

2) Daher kann man, wenn Vorder- und Hinterglied einen gemeinschaftlichen Theiler haben, durch denselben ohne Störung des Verhältnisses theilen, und dadurch das Verhältniß in kleineren Zahlen darstellen.

Z. B. 1824 : 3648 wird
1 : 2.

§. 5.

Erklär. 1) Ein geometrisches Verhältniß heißt zusammengesetzt, wenn sein Vorderglied das Produkt der Vorderglieder, und sein Hinterglied das Produkt der Hinterglieder mehrerer gegebenen Verhältnisse ist. Diese letzteren, einzeln betrachtet, heißen einfache Verhältnisse.

Z. B. a : b
c : d
ac : bd.

2) Sind die einzelnen Vorder- und Hinterglieder der einfachen Verhältnissen einerlei Zahlen, so heißt das aus zwei solchen einfachen Verhältnissen zusammengesetzte ein duplizirtes. Z. B.

a : b
a : b
$a^2 : b^2$

Aus drei solchen einfachen Verhältnissen entsteht ein triplizirtes; z. B.

$$\begin{array}{c} a : b \\ a : b \\ a : b \\ \hline a^3 : b^3 \end{array}$$

3) Wird aus dem Vorder- und Hintergliede eines einfachen Verhältnisses die Wurzel vom zweiten oder dritten Grade ausgezogen, so heißt das neu entstandene Verhältniß in Bezug auf das gegebene, subduplizirtes, oder subtriplizirtes.

Z. B. $\begin{array}{c} a : b \\ \hline \sqrt{a} : \sqrt{b} \end{array}$ oder auch

$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$.

*) Diese Benennungen kommen jedoch selten mehr vor.

§. 6.

Lehrs. Wenn mehrere Verhältnisse so beschaffen sind, daß immer das Hinterglied des einen Verhältnisses dem Vordergliede des nächstfolgenden Verhältnisses gleich ist, so ist das Verhältniß des ersten Gliedes zum letzten dem aus allen diesen Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse gleich.

Bew. Wenn $\begin{array}{c} a : b \\ b : c \\ c : d \\ d : f \end{array}$ ist, so ist

$abcd : bcdf = a : f.$

(nach §. 4. Folg. 2)

§. 7.

Lehrs. Der Quotient eines zusammengesetzten Verhältnisses ist dem Produkte der Quotienten aller einfachen Verhältnisse gleich.

Bew. Es seien gegeben die einfachen Verhältnisse

$a : b$, dessen Quotient $\frac{b}{a}$ ist,

$e : d$, ... $\frac{d}{e}$ . . . ,

$e : f$, ... $\frac{f}{e}$ ist, so

wird $ace : bdf$ das zusammengesetzte Verhältniß seyn dessen Quotient $\frac{bdf}{ace}$ oder $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{f}{e}$ wird.

§. 8.

Lehrs. Werden die Glieder eines Verhältnisses durch die Glieder eines andern dividirt, so ist der Quotient des neuen Verhältnisses gleich dem Quotienten des ersteren, dividirt durch den Quotienten des zweiten Verhältnisses.

Bew. Es sei gegeben

$a : ap$, dessen Quotient p

und $b : bq$, dessen Quotient q ist; dann entsteht

das neue $\frac{a}{b} : \frac{ap}{bq}$;

der Quotient desselben ist $\frac{abp}{abq} = \frac{p}{q}$.

§. 9.

Lehrs. Werden die Glieder eines Verhältnisses zu dem nämlichen Potenzexponenten erhoben, so ist der Quotient des neuen Verhältnisses die eben so vielte Potenz des vorigen Quotienten.

Bew. Es sey gegeben das Verhältniß

$a : b$, dessen Quotient $\frac{b}{q} = q$ sei.

Der Quotient von $a^m : b^m$ aber ist $\frac{bm}{am} = \left(\frac{b}{a}\right)^m = q^m$.

Folg. Der angeführte Satz gilt auch in Bezug auf das Wurzelausziehen; man darf nur

$\frac{1}{n}$ statt m setzen.

Ist a : b gegeben, und $q = \frac{b}{a}$,

so hat man $a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, dessen

Quotient $\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n]{q}$ wird.

Zweiter Abschnitt.

Von den Proportionen.

---

§. 10.

Erkl. 1) Die Gleichstellung zweier gleichen Verhältnisse nennt man eine Proportion. Je nachdem die Verhältnisse arithmetisch oder geometrisch sind, heißt auch die Proportion arithmetisch oder geometrisch.

2) Jede Proportion besteht demnach aus 4 Gliedern; das erste und vierte Glied nennt man die äussern, das zweite und dritte die mittleren.

3) Die Proportion heißt stätig oder discret, je nachdem die mittleren Glieder gleich oder ungleich sind.

I.) Von den arithmetischen Proportionen.

§. 11.

Lehrs. Jede arithmetische Proportion ist unter der Formel $a - (a + d) = b - (b + d)$ enthalten.

Bew. Aus §. 1. Folg. 3.

Folg. 1) Daher ist die Formel für die stätige Proportion

$$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2\,d)$$

oder kürzer $a - (a + d) - (a + 2\,d)$.
Man darf nur in der Formel des §. $a + d$ für b setzen.

2) Die Summe der äussern Glieder ist bei der discreten arithm. Prop. der Summe der mittleren, bei der stätigen aber dem doppelten mittleren gleich.

3) Wenn die Summe zweier Zahlen der Summe zweier anderen gleich ist, so geben diese 4 Zahlen eine arithm. Proportion; die beiden Zahlen der einen Summe werden die äussern, die beiden Zahlen der andern Summe die mittleren Glieder; und wenn die Summe zweier Zahlen dem Zwiefachen einer andern Zahl gleich ist, so ist letztere die mittlere Proportionszahl zwischen den beiden ersten.

§. 12.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Zahlen die vierte arithm. Proportionalzahl finden.

Aufl. und Bew. Da nicht nur die drei Zahlen gegeben seyn müssen, sondern auch die Ordnung, in welcher sie als Glieder in der Proportion stehen sollen, so kann die gesuchte vierte Zahl (x) als erstes, zweites, drittes oder viertes Glied zu stehen kommen, man hat daher

1) $x - b = c - d$ woraus $x + d = b + c$
2) $a - x = c - d$ . . . $a + d = x + c$
3) $a - b = x - d$ . . . $a + d = b + x$
4) $a - b = c - x$ . . . $a + x = b + c$;

daraus folgt für 1) $x = b + c - d$
für 2) $x = a + d - c$
für 3) $x = a + d - b$
für 4) $x = b + c - a$.

§. 13.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen die dritte arithm. Proportionalzahl finden.

Aufl. und Bew. Auf die nämliche Weise, wie im §. 12. hat man

1) $x - b - d$ woraus $x + d = 2b$
2) $a - x - d$ . . . $a + d = 2x$

3) $a - b - x \quad \ldots \quad a + x = 2b$;
daraus folgt für 1) $x = 2b - d$

für 2) $x = \frac{a+d}{2}$

für 3) $x = 2b - a$.

II.) Von den geometrischen Proportionen.

§. 14.

Lehrs. Die allgemeine Formel einer jeden geometr. Proportion ist

$$a : aq = b : bq.$$

Bew. Aus §. 1. Folg. 3.

Folg. Daher ist die Formel für die stätige

$$a : aq : aq^2.$$

Man darf nur in der Formel des §. aq anstatt b setzen.

§. 15.

Lehrs. I. In jeder geometr. Proportion ist das Produkt der äussern Glieder gleich dem Produkte der mittleren.

Bew. Wenn $a : b = c : d$ eine Proportion ist, so müssen wegen der Gleichheit der Verhältnisse auch die Quotienten gleich seyn, d. h. es muß

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ seyn,}$$

daher auch $\frac{b}{a} . ac = \frac{d}{c} . ac$ oder

$$bc = da \text{ seyn.}$$

Auch aus der Formel

$$a : aq = b : bq \text{ folgt}$$

$$ab\,q = ab\,q.$$

II.) Bei der stätigen Proportion ist das Produkt der äussern Glieder dem Quadrate des mittleren gleich.

Denn aus $a : b : c$

ist $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$$\frac{b}{a} \cdot ab = \frac{c}{b} \cdot ab$$

$$b\,b = a\,c.$$

Oder auch aus der Formel

$a : aq : aq^2$ folgt

$$a^2q^2 = a^2q^2.$$

Folg. 1) Wenn das Produkt zweier Faktoren dem Produkt zweier anderer gleich ist, so geben diese 4 Faktoren eine geom. Proportion, die beiden Faktoren des einen Produkts werden die äussern, die beiden Faktoren des andern Produkts die mittleren Glieder;

denn wenn $ad = bc$ ist,

so ist $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$,

oder $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$; d. h.

die Quotienten der Verhältnisse $c \div d$ und $a \div b$ sind gleich; man hat also

$a - b = c - d$ eine Proportion; und wenn

2) das Produkt zweier Faktoren eine Quadratzahl gibt, so ist die Wurzel der letztern die mittlere geometr. Proportionalzahl zu den beiden Faktoren.

Denn wenn $ac = b^2 = bb$ ist, so (nach Folg. 1)

ist $a : b = b : c$ oder

$a : b : c$.

§. 16.

Lehrs. Sind die Vorderglieder der beiden Verhältnisse einer geometr. Proportion einander gleich, so müssen auch die Hinterglieder gleich seyn, und umgekehrt.

Bew. Aus $a : b = c : d$ wird

$$a\,d = b\,c.$$

Ist nun $a = c$, so ist

$\frac{a\,d}{a} = \frac{b\,c}{c}$ oder

$$d = c.$$

Für $b = d$ wird eben so

$$a = c.$$

§. 17.

Lehrs. Sind die Vorderglieder oder Hinterglieder der beiden Verhältnisse ungleich, so gehört zum größern Vordergliede auch ein größeres Hinterglied, und zum größeren Hintergliede auch ein größeres Vorderglied.

Bew. Aus $a : b = c : d$ folgt

$$ad = bc;$$

Ist nun $a > c$, so ist

$$\frac{ad}{a} < \frac{bc}{c} \text{ oder}$$

$$d < b.$$

Für $b > d$ wird eben so

$$a > c.$$

§. 18.

Lehrs. Sind die beiden Glieder des ersten Verhältnisses gleich, so müssen auch jene des zweiten Verhältnisses gleich seyn.

Bew. Aus $a : b = c : d$ folgt

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Ist nun $b = a$ so folgt

$$1 = \frac{c}{d} \text{ d. h. es muß auch}$$

$$d = c \text{ seyn.}$$

§. 19.

Aufgabe. Zu drei Zahlen die vierte Proportionalzahl finden.

Aufl. und Bew. Eben so wie in §. 12. wird man haben

1) $x : b = c : d$ woraus $xd = bc$

2) $a : x = c : d$ . . . $ad = cx$

3) $a : b = x : d$ woraus $a d = b x$

4) $a : b = c : x$ . . . $a x = b c$;

daraus folgt für 1) $x = \frac{b c}{d}$

für 2) $x = \frac{a d}{c}$

für 3) $x = \frac{a d}{b}$

für 4) $x = \frac{b c}{a}$.

§. 20.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl zu finden.

Aufl. und Bew. Man hat wieder

1) $x : b : c$ woraus $c x = b^2$

2) $a : x : c$ . . . $a c = x^2$

3) $a : b : x$ . . . $a x = b^2$;

daraus folgt für 1) $x = \frac{b^2}{c}$

für 2) $x = \sqrt{a c}$

für 3) $x = \frac{b^2}{a}$.

§. 21.

Versetzungen und Veränderungen, welche mit den Gliedern einer Proportion vorgenommen werden können, ohne die Proportion zu stören.

Wenn $a : b = c : d$ eine Proportion ist, so werden auch alle folgenden Ansätze noch Proportionen seyn:

I) $a : c = b : d$

II) $d : b = c : a$

III) $d : c = b : a$

IV) $b : a = d : c$

V) $c : a = d : b$

VI) $c : d = a : b$

VII) $b : d = a : c$

VIII) $a \pm c : b \pm d = a : b$

IX) $a \pm c : b \pm d = c : d$

X) $a + c : b + d = a - c : b - d$

XI) $a \pm b : c \pm d = a : c$

XII) $a \pm b : c \pm d = b : d$

XIII) $a + b : c + d = a - b : c - d$

XIV) $ma : mb = nc : nd$

XV) $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$

XVI) $ma : nb = mc : nd.$

XVII) $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = : \frac{c}{m} : \frac{d}{n}.$

XVIII) $a^m : b^m = c^m : d^m$

XIX) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$

Anmerk. Aus den Proportionen von No. VIII. bis No. XIX. lassen sich durch Anwendung der Versetzungen von No. I. bis No. VII. wieder neue Proportionen ableiten.

Beweis für I bis VII.

Wenn $a : b = c : d$ ist, so ist

$$ad = bc.$$

Daraus folgen (nach §. 15. Folg. 1.) so viele Proportionen, als man die Faktoren auf verschiedene Weise als mittlere oder äussere Glieder annehmen kann; nämlich nebst der gegebenen Proportion $a : b = c : d$ noch 7 andere, wie sie von No. I. bis No. VII. auf einander folgen.

Beweis für VIII. IX. X.

Da die beiden Verhältnisse der Proportion $a : b = c : d$ einander gleich sind, so ist nach §. 3.

$$a \pm c : b \pm d = a : b = c : d,$$

mithin auch $a + c : b + d = a - c : b - d.$

Beweis für XI. XII. XIII.

Nach No. I. ist $a : c = b : d$

folglich nach §. 3. $a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$

mithin auch $a + b : c + d = a - b : c - d$.

Beweis für XIV. XV. XVI. XVII.

Wenn ein mittleres und ein äusseres Glied einer Proportion durch die nämliche Zahl multiplizirt oder dividirt wird, so erhält man wieder eine Proportion.

Denn sind die beiden Glieder zugleich Glieder des nämlichen Verhältnisses, so folgt die Richtigkeit unmittelbar aus §. 4. Sind sie aber Glieder verschiedener Verhältnisse, so können sie zuvor (nach I. bis VII.) in ein Verhältniß gebracht, und nach der Multiplikation oder Division wieder in ihre vorige Stellung versetzt werden.

Beweis für XVIII und XIX.

Es sei q der Quotient von $a : b = c : d$ so ist (nach §. 9.) q^m der Quotient sowohl von $a^m : b^m$ als auch von $c^m : d^m$; folglich

ist $a^m : b^m = c^m : d^m$ eine Proportion.

Setzt man in No. XVIII. $m = \frac{1}{n}$, so entsteht

$$a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = c^{\frac{1}{n}} : d^{\frac{1}{n}} \text{ oder}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$$

Oder auch:

Wenn $a : b = c : d$ ist, so ist

$ad = bc$; folglich

$(ad)^m = (bc)^m$ oder $a^m . d^m = b^m . c^m$,

und $\sqrt[n]{(ad)} = \sqrt[n]{(bc)}$ oder $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{c}$, woraus ebenfalls XVIII. und XIX. folgen.

§. 22.

Lehrs. Werden die gleichvielten Glieder mehrerer Proportionen mit einander multiplizirt, oder durcheinander

dividirt, so bilden die Produkte und Quotienten wieder eine Proportion;

d. i. wenn $a : b = c : d$

und $e : f = g : h$ ist, so

ist 1) $ae : bf = cg : dh$, und

2) $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$; und so fort

auch mit mehr als zwei Proportionen.

Bew. Denn durch die Multiplikation entstehen eigentlich zwei zusammengesetzte Verhältnisse; der Quotient eines jeden derselben ist aber (nach §. 7.) dem Produkte der Quotienten aller einfachen Verhältnisse gleich; da diese Produkte nun, als aus einerlei Faktoren bestehend, gleich sind, so sind auch die Quotienten der beiden zusammengesetzten Verhältnisse, mithin auch diese gleich.

Nämlich ist von $a : b = c : d$ der Quotient p,

und von $e : f = g : h$ der Quotient q,

so ist von $ae : bf$ der Quotient pq, und

von $cg : dh$ auch pq, folglich

$ae : bf = cg : dh$.

Anderer Beweis.

Da $ad = bc$ und

$eh = fg$ ist, so

ist auch $adeh = bcfg$ oder

$ae.dh = cg.bf$, woraus

$ae : bf = cg : dh$ folgt.

Bew. für 2. Ist von $a : b = c : d$ der Quotient p,

und von $e : f = g : h$ der Quotient q,

so ist (nach §. 8.) von $\frac{a}{e} : \frac{b}{f}$ der Quotient $\frac{p}{q}$,

und von $\frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ auch $\frac{p}{q}$, folglich

$$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$$

Anderer Beweis. Da $a\,d = b\,c$ und

$$\underline{e\,h = f\,g}$$ ist, so

ist auch $\frac{a\,d}{e\,h} = \frac{b\,c}{f\,g}$ oder

$\frac{a}{e}\,\frac{d}{h} = \frac{b}{f}\,\frac{c}{g}$ woraus

$\frac{a}{e} : \frac{c}{g} = \frac{b}{f} : \frac{d}{h}$ folgt.

§. 23.

Lehrs. Wenn in zwei Proportionen zwei gemeinschaftliche Glieder vorkommen, so stehen die übrigen Glieder auch in einer Proportion;

I.) wenn die gemeinschaftlichen Glieder das erste oder zweite Verhältniß bilden; d. i.

wenn $a : b = c : d$
und $\underline{a : b = e : f}$ ist,
so ist $c : d = e : f$. (ex aequo simpliciter)

Bew. unmittelbar aus §. 1. Folg. 2.

II.) wenn die gemeinschaftlichen Glieder die Vorder- oder Hinterglieder der einzelnen Verhältnisse bilden; d. i.

wenn $a : b = c : d$
und $\underline{b : e = d : f}$ ist,
so ist $a : e = c : f$ (ex aequo et ordinatim)

Bew. Wenn $a : b = c : d$ ist
und $\underline{b : e = d : f}$, so ist auch
$a : c = b : d$
und $b : d = e : f$, folglich
nach Nro. I. $a : c = e : f$,
und $a : e = c : f$.

III.) Wenn die gemeinschaftlichen Glieder die äusseren oder mittleren Glieder sind; d. i.

wenn $a : b = c : d$

und $b : e = f : c$ ist, so ist
verkehrt $a : e = f : d$. (ex aequo et pertubate)

Bew. Es wird $a\,d = b\,c$
und $b\,c = e\,f$ seyn,
folglich $a\,d = e\,f$, und daraus
$a : e = f : d$.

Dritter Abschnitt.

Von den Progressionen.

§. 24.

Erklär. 1) Reihe ist eine Anzahl von Zahlen, die nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden; die einzelnen Zahlen, aus welchen die Reihe besteht, heißen ihre Glieder; das Gesetz der Reihe, durch die Rechnungszeichen ausgedrückt, heißt das allgemeine Glied der Reihe.

2) Wenn die Differenzen der einzelnen Glieder einer Reihe constant sind, so heißt die Reihe eine arithmetische Reihe, und zwar der ersten, zweiten, dritten.... nten Differenzen constant sind. — Die arithmetischen Reih'en der ersten Ordnung heißt man auch arithmetische Progressionen.

Z. B. A) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49....
3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
2, 2, 2, 2, 2, ...

Die Reihe A ist eine Reihe der zweiten Ordnung, die Reihe B aber ist von der ersten Ordnung. Die Reihe 1,

8, 27, 64, 125, 216 .... ist eine arithmetische von der dritten Ordnung, weil erst die Glieder ihrer dritten Unterschiede alle einander gleich werden.

I.) Arithmetische Progression.

§. 25.

Erklär. Eine arithmetische Progression ist (nach §. 24.) eine Reihe von Zahlen, welche immer um eine gleiche Differenz d steigen oder fallen.

Folg. 1) Man erhält jedes einzelne Glied, wenn man zum vorhergehenden Gliede jene Differenz addirt oder davon subtrahirt.

2) Dadurch ist man in den Stand gesetzt, nach und nach alle Glieder einer arithmetischen Progression zu finden, wenn das erste Glied und die Differenz gegeben ist. Z. B.

Ist das erste Glied 2 und die Differenz 3, so wird die Reihe entstehen

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 \ldots.$$

3) Daher ist die allgemeine Formel

$$a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d \ldots.$$

4) Daher ist das allgemeine oder das nte Glied

$$a + (n - 1) d;$$

denn jedes Glied der allgemeinen Formel besteht aus der Summe des ersten Gliedes a und der so vielfachen Differenz, als Glieder vorausgehen.

5) Daher ist, wenn man die Anzahl aller gegebenen Glieder n, und das letzte Glied z heißt,

$$z = a + (n - 1) d.$$

6) Daher ist jede arithmetische Progression eine fortgesetzte stätige Proportion, und daher müssen jedesmal drei unmittelbar aufeinander folgende Glieder wieder eine stätige Proportion geben.

$$a - (a + d) - (a + 2\,d.)$$
$$(a + d) - (a + 2\,d) - (a + 3\,d) \text{ u. s. w.}$$

7) Die vollständige Formel einer abgeschlossenen arithmetischen Progression wird daher seyn:

$$a,\ a + d,\ a + 2\,d,\ a + 3\,d, \ldots a + (n - 2)\,d,\ a + (n - 1)\,d.$$

6) Aus Folg. 5) folgt

$$1)\ a = z - (n - 1)\,d$$

$$2)\ d = \frac{z - a}{n - 1}$$

und $3)\ n = \frac{z - a}{d} + 1$, d. h.

man kann jede der vier Größen a, d, n und z finden, wenn die übrigen drei bekannt sind.

§. 26.

Lehrs. Die Summe jeder zwei vom ersten und letzten Gliede gleichweit abstehenden Glieder ist der Summe des ersten und letzten Gliedes gleich.

Bew. Ein Glied, welches die mte Stelle nach dem ersten einnimmt, ist allgemein $= a + m\,d$; (§. 25. Folg. 4.) und ein Glied, welches um die nämliche mte Stelle von dem letzten entfernt ist, ist $= a + (n - 1 - m)\,d$.

Nun ist aber

$$\{a + m\,d\} + \{a + (n - 1 - m)\,d\} = 2\,a + (n - 1)\,d$$
$$= (a + z).$$

§. 27.

Lehrs. Die Summe von n Gliedern ist

$$S = \left(\frac{a + z}{2}\right)n = (a + z).\frac{n}{2} = \frac{(a + z)\,n}{2}$$

Bew. Offenbar ist

$$S = |a| + |a + d| + \ldots + |a + (n-2)d| + z|$$
und
$$S = |z| + |a + (n-2)d| + \ldots + |a + d| + a|$$

Addirt man nun beide Reihen, so erhält die Summe 2 S (nach §. 26.) offenbar n mal die Summe (a + z); d. i.

$$2S = (a + z)\,n, \text{ woraus}$$
$$S = (a + z)\frac{n}{2} \text{ folgt.}$$

Folg. Daraus wird auch

$$1)\quad a = \frac{2S - nz}{n}$$
$$2)\quad z = \frac{2S - an}{n}$$
$$3)\quad n = \frac{2S}{a + z}.$$

§. 28.

Aufg. Wenn von den 5 Größen a, z, n, d und S drei gegeben sind, jedesmal die beiden übrigen zu finden.

Auflös. Die Auflösung dieser Aufgabe wird durch Hilfe der beiden Formeln

$$z = a + (n - 1)\,d \text{ und}$$
$$S = (a + z).\frac{n}{2} \text{ bewerkstelligt;}$$

und da die Anzahl der Amben aus 5 Stücken 10 ist, so sind 10 Fälle möglich, in deren jedem zwei von jenen Größen gesucht werden, also sind im Ganzen 20 Aufgaben möglich. Die Auflösung der einzelnen Aufgaben überlasse ich der Selbstübung des Lernenden.

Hier folgen die Resultate:

Aufgabe.	Gesuchte Größe.	Gegebene Größen.	Formeln.
Nro. I.	a	z, n, d.	$z - (n - 1) d$
„ II.	a	n, d, S.	$\frac{S}{n} - \frac{(n-1) d}{2}$
„ III.	a	d, S, z.	$\frac{d \pm \sqrt{\{-8dS + (d+2z)^2\}}}{2}$
„ IV.	a	S, z, n.	$\frac{2S - nz}{n}$
„ V.	z	n, d, S.	$\frac{S}{n} + \left(\frac{n-1}{2}\right) d.$
„ VI.	z	d, S, a.	$\frac{-d \pm \sqrt{\{8dS + (2a-d)^2\}}}{2}$
„ VII.	z	S, a, n.	$\frac{2S - an}{n}$
„ VIII.	z	a, n, d.	$a + (n - 1) d.$
„ IX.	d	S, a, z	$\frac{(z + a)(z - a)}{2S - a - z}$
„ X.	d	a, z, n.	$\frac{z - a}{n - 1}$
„ XI.	d	z, n, S.	$\frac{2nz - 2S}{n(n - 1)}$
„ XII.	d	n, S, a.	$\frac{2S - 2an}{n(n - 1)}$
„ XIII.	n	d, S, a.	$\frac{d - 2a \pm \sqrt{\{8dS + (2a-d)^2\}}}{2d}$
„ XIV.	n	S, a, z.	$\frac{2S}{a + z}$
„ XV.	n	a, z, d.	$\frac{z - a}{d} + 1$

Aufgabe.	Gesuchte Grösse.	Gegebene Grössen	Formeln.
Nr. XVI.	n	z, d, S.	$\frac{d+2z \pm \sqrt{\{-8dS+(d+2z)^2\}}}{2d}$
„ XVII.	S	a, z, n.	$(a+z.)\,\frac{n}{2}$
„ XVIII.	S	z, n, d.	$\left(z - d.\,\frac{n-1}{2}\right).n$
„ XIX.	S	n, d, a.	$\left(a + d.\,\frac{n-1}{2}\right).n$
„ XX.	S	d, a, z.	$\frac{(z+a)(d+z-a)}{2d}$

§. 29.

Beispiele. 1) Welches ist die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000?

Hier ist $a = 1$
$z = 1000$
$n = 1000$; folglich nach Nro. XVII.
$S = 500500$.

2) Es hatte Jemand einen Brunnen graben lassen, und zwar für den ersten Fuß in die Tiefe 2 Gulden, für jeden folgenden $\frac{1}{2}$ Gulden mehr, und im Ganzen 1005 G. bezahlt. Wie viel Fuß tief war der Brunnen geworden?

Hier ist $a = 2$.
$d = \frac{1}{2}$.
$S = 1005$; folglich nach Nro. XIII.
$n = 60$ Fuß tief.

3) Ein Stein fällt von einem Thurme während 5 Sekunden auf den Boden; wie hoch ist der Thurm?

Ein Körper legt im freien Falle in der ersten Sekunde beinahe 15 Par. Fuß, in der zweiten 45 Fuß u. s. w. zurück:

Hier ist also $a = 15.$
$d = 30.$
$n = 5$; folglich nach Nro. XIX.
wird $S = 375$ Par. Fuß. (ohngefähr)

4) Ein Thurm ist 240 Fuß hoch, wie viele Sekunden verfließen, bis ein Stein von der Spitze desselben auf den Boden fällt?

Hier ist $a = 15$
$d = 30$
$S = 240$; folglich nach Nro. XIII.
wird $n = 4$ Sekunden.

II.) Geometrische Progression.

§. 30.

Erklär. Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, deren jede, durch die vorhergehende getheilt, einerlei Quotienten q gibt.

Folg. 1) Man erhält daher jedes einzelne Glied, wenn man das vorhergehende Glied mit jenem Quotienten q multiplizirt.

2) Dadurch ist man in den Stand gesetzt, nach und nach alle Glieder einer geom. Progression zu finden, wenn das erste Glied und der Quotient gegeben ist; z. B.

Ist das erste Glied 2, und der Quotient 3, so wird die Reihe entstehen:

2, 6, 18, 54, 162, 486 . . . .

3) Daher ist die allgemeine Formel

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots\ldots$$

4) Daher ist das allgemeine, oder nte Glied

$$aq^{n-1};$$

denn jedes Glied der allgemeinen Formel besteht aus dem Produkte des ersten Glieds a und einer Potenz des Quotienten, deren Exponent so viele Einheiten hat, als Glieder vorhergehen.

5) Daher ist, wenn man die Anzahl aller gegebenen Glieder n, und das letzte Glied z heißt,

$$z = a\, q^{n-1}.$$

6) Daher ist jede geometrische Progression eine fortgesetzte stätige Proportion, und daher müssen jedesmal drei unmittelbar aufeinander folgende Glieder wieder eine stätige Proportion geben.

$$a : a q : a q^2$$

$$a q : a q^2 : a q^3 \text{ u. s. w.}$$

Die vollständige Formel einer abgeschlossenen geometr. Progression wird daher seyn:

$$a,\ a q,\ a q^2,\ a q^3 \ldots\ldots a q^{n-2},\ a q^{n-1}.$$

7) Aus Folg. 5) folgt

1) $a = \dfrac{z}{q^{n-1}}$

2) $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{z}{a}}$ und

3) $n = \dfrac{\log z - \log a}{\log q} + 1$; d. h.

man kann jede der vier Größen a, q, n und z finden, wenn die übrigen drei bekannt sind.

*) In Nro. 3. kann n nur durch Hilfe der Logarithmen gefunden werden, wovon später.

§. 31.

Lehrs. Das Produkt jeder zwei vom ersten und letzten Gliede gleichweit abstehenden Glieder ist dem Produkte des ersten und letzten Gliedes gleich.

Bew. Ein Glied, welches vom ersten Gliede um m Glieder entfernt ist, ist

$$= a\, q^m; \text{ (§. 30. Folg. 4.)}$$

und ein Glied, welches um m Glieder vom letzten entfernt ist, ist

$= a\,q^{n-1-m};$

also $a\,q^m \times a\,q^{n-1-m} = a^2\,q^{n-1} = a\,z.$

*) Durch Vergleichung der §§. 25. und 26. mit den §§. 30. und 31. wird man die zwischen den arithmetischen und geometrischen Progressionen bestehende Analogie leicht bemerken.

§. 32.

Lehrs. Die Summe von n Gliedern ist

$$S = \frac{q\,z - a}{q - 1} = \frac{a - q\,z}{1 - q} = \frac{q^n\,a - a}{q - 1} = \frac{a - q^n\,a}{1 - q}$$

Bew. Denn offenbar ist

$$S = a + a\,q + a\,q^2 + \ldots + a\,q^{n-2} + a\,q^{n-1};$$

$$\text{u. } q\,S = \quad + a\,q + a\,q^2 + \ldots + a\,q^{n-2} + a\,q^{n-1} + a\,q^n.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man

$$q\,S - S = a\,q^n - a, \text{ folglich}$$

$$1)\; S = \frac{a\,q^n - a}{q - 1}.$$

Zieht man aber die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man

$$S - q\,S = a - a\,q^n, \text{ folglich}$$

$$2)\; S = \frac{a - a\,q^n}{1 - q},$$ und diese Formel

gilt für die fallenden Reihen, indem bei diesen immer ~~179~~ $1 > q$ ist, weil q ein ächter Bruch ist.

Da $z = a\,q^{n-1}$ ist,

so wird $q\,z = a\,q^n$; folglich wird aus der Formel 1)

$$3)\; S = \frac{q\,z - a}{q - 1};$$ und aus der Formel 2)

$$4)\; S = \frac{a - q\,z}{1 - q}.$$

Ein anderer Beweis:

Da (nach §. 30.) immer zwei unmittelbar aufeinander folgende Glieder ein geometrisches Verhältniß bilden, d. h.

$$a : aq$$
$$aq : aq^2$$
$$aq^2 : aq^3$$
$$\ldots : \ldots$$
$$\ldots : \ldots$$
$$aq^{n-2} : aq^{n-1}$$

und alle diese Verhältnisse einander gleich seyn müssen, so folgt nach §. 3

$(a + aq + .. + aq^{n-2}) : (aq + aq^2 + .. + aq^{n-1}) = a : aq,$

oder $S - z : S - a = a : aq$ oder $= 1 : q$,

woraus zuerst $q(S - z) = (S - a)$,

dann $qS - S = qz - a$ oder

$S = \frac{qz - a}{q - 1}$ folgt, wie im

ersten Beweise.

§. 33.

Aufg. Wenn von den 5 Größen a, z, n, q und S drei gegeben sind, jedesmal die beiden übrigen zu finden.

Auflös. Die Auflösung dieser Aufgabe wird durch Hilfe der Formeln

$z = aq^{n-1}$ und

$S = \frac{zq - a}{q - 1}$ oder

$= \frac{aq^n - a}{q - 1}$ bewerkstelligt.

Auch hier sind, wie im §. 28., zwanzig Aufgaben möglich.

Hier folgen die Resultate der Auflösungen der einzelnen Aufgaben.

Aufgabe.	Gesuchte Grösse.	Gegebene Grössen.	Formeln.
Nr. I.	a	z, n, q.	$\frac{z}{q^{n-1}}$
„ II.	a	n, q, S.	$\frac{S.\ (q-1)}{q^n - 1}$
„ III.	a	q, S, z.	$z\,q - S\ (q-1)$
„ IV.	a	S, z, n.	$a.\ (S-a)^{n-1} - z.\ (S-z)^{n-1} = o$
„ V.	z	n, q, S.	$\frac{(S\,q - S).\ q^{n-1}}{q^n - 1}$
„ VI.	z	q, S, a.	$\frac{(a + S\ (q-1)}{q}$
„ VII.	z	S, a, n.	$z\ (S-z)^{n-1} - a\ (S-a)^{n-1} = o$
„ VIII.	z	a, n, q.	$a.\ q^{n-1}$
„ IX.	q	S, a, z.	$\frac{S-a}{S-z}$
„ X.	q	a, z, n.	$\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$
„ XI.	q	z, n, S.	$q^n - \left(\frac{S}{S-z}\right) q^{n-1} + \frac{z}{S-z} = o$
„ XII.	q	n, S, a.	$q^n - \frac{q}{a.}\,S + \frac{S}{a} - 1 = o$
„ XIII.	n	q, S, a.	$\log\left(1 + S.\ \frac{q-1}{a}\right) : \log q$
„ XIV.	n	S, a, z,	$\left\{1 + \left(\log \frac{z}{a}\right)\right\} : \left(\log \frac{S-a}{S-z}\right)$
„ XV.	n	a, z, q.	$1 + \frac{\log \frac{z}{a}}{\log q}$
„ XVI.	n	z, q, S.	$1 + \left\{\log \frac{z}{S-q(S-z)}\right\} \log q$

Aufgabe.	Gesuchte Größe.	Gegebene Größen.	Formeln.
Nr. XVII.	S	a, z, n.	$\frac{z.\sqrt[n-1]{z} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}$
„ XVIII.	S	z, n, q.	$\frac{z}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
„ XIX.	S	n, q, a.	$\frac{a.(q^n - 1)}{q - 1}$
„ XX.	S	q, a, z.	$\frac{zq - a}{q - 1}$

Ableitung dieser Formeln, nebst einigen Bemerkungen über dieselben.

ad I.) Nro. I. findet sich bereits in §. 30. Folg. 6.

ad II.) Nro. II. folgt unmittelbar aus

$$S = \frac{a\,q^n - a}{q - 1}$$

ad III.) Nro. III. folgt unmittelbar aus

$$S = \frac{q\,z - a}{q - 1}$$

ad IV. Da $S = \frac{q\,z - a}{q - 1}$ ist, so wird

$$S\,q - q\,z = S - a.$$

Man substituire $\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$ für q aus §. 30. Folg. 6., so erhält man

$$S.\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}.\,z = S - a, \text{ oder}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}\,(S - z) = S - a$$

$$\sqrt[n-1]{z}\,(S - z) = \sqrt[n-1]{a}.\,(S - a)$$

$$z.\,(S - z)^{n-1} = a.\,(S - a)^{n-1} \text{ d. i. Nro. III.}$$

Die Unbekannte muß also hier durch Auflösung einer höheren Gleichung aufgefunden werden.

ad V.) Es ist $S = \frac{qz - a}{q - 1}$ oder

$$qS - S = qz - a.$$

Man setze für a seinen Werth $\frac{z}{q^{n-1}}$, so erhält man

$qS - S = qz - \frac{z}{q^{n-1}}$ und daraus

$$\frac{q^{n-1}(qS - S)}{q^n - 1} = z.$$

ad VI.) Nro. VI. folgt unmittelbar aus $S = \frac{qz - a}{q - 1}$

ad VII.) Nro. VII. wird eben so abgeleitet, wie Nro. IV.; auch hier muß dann die Unbekannte durch Auflösung einer höhern Gleichung gefunden werden.

ad VIII.) Nro. VIII. steht bereits in §. 30. Folg. 5.

ad IX. Nro. IX. folgt unmittelbar aus $S = \frac{qz - a}{q - 1}$

ad X.) Nro. X. stets bereits in §. 30. Folg. 6.

Durch Anwendung der Logarithmen erhält man

$$\log q = \frac{\log z - \log a}{n - 1}$$

ad XI.) Aus $S = \frac{qz - a}{q - 1}$ wird

$$qS - S - qz + a = o.$$

Man setze $\frac{z}{q^{n-1}}$ für a, so erhält man

$$qS - S - qz + \frac{z}{q^{n-1}} = o \text{ oder}$$

$$q^n (S - z) - S.\, q^{n-1} + z = o.$$

Auch die Formel Nro. XI. ist eine höhere Gleichung, welche aufgelöst werden muß, wenn man q finden will. Das nämliche gilt auch von der folgenden Formel.

ad XII.) Aus $S = \frac{q^n.\, a - a}{q - 1}$ wird

$$Sq - q^n.\, a - S + a = o, \text{ oder}$$

$$q^n - \frac{q}{a} S + \frac{S}{a} - 1 = o.$$

ad XIII.) Aus $S = \frac{a q^n - a}{q - 1}$ wird

$$q^n = \frac{a + q S - S}{a}$$

ad XIV.) Auf dieselbe Weise wie oben (ad IV.) erhält man wieder

$$\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \frac{S - a}{S - z} \text{ oder}$$

$$\frac{z}{a} = \left(\frac{S - a}{S - z}\right)^{n-1}$$

ad XV.) Aus $z = a q^{n-1}$

wird $q^{n-1} = \frac{z}{a}$.

ad XVI.) Ebenso, wie ad Nro. V., erhält man

$$q S - S = q z - \frac{z}{q^{n-1}} \text{ oder}$$

$$q^{n-1} = \frac{z}{S - q (S - z)}.$$

Da in den vier zuletzt abgeleiteten Gleichungen die gesuchte Unbekannte n jedesmal als Potenzexponent, oder als Theil eines solchen erscheint, so läßt sich n aus diesen Gleichungen nur durch Hilfe der Logarithmen finden. Dieß kann jedoch erst später deutlich werden; um aber den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, will ich hier die Auflösungen beifügen.

Aus der Gleichung ad XIII. wird

$$n. \log q = \log \left\{\frac{a + q S - S}{a}\right\} \text{ und daher}$$

$$n = \log \left\{1 + \frac{S. (q - 1)}{a}\right\} : \log q.$$

Aus der Gleichung ad XIV. wird

$$(n - 1) \log \left\{\frac{S - a}{S - z}\right\} = \log \frac{z}{a}, \text{ und daher}$$

$$u - 1 = \frac{\log \frac{z}{a}}{\log \left\{ \frac{S - a}{S - z} \right\}} \text{ oder}$$

$$n = \left\{ 1 + (\log \frac{z}{a}) \right\} : \log \left\{ \frac{S - a}{S - z} \right\}$$

Aus der Gleichung ad XV. wird

$$(n - 1) \log q = \log \frac{z}{a} \text{ oder}$$

$$n = \frac{\log z - \log a}{\log q} + 1$$

Aus der Gleichung ad XVI. wird

$$(n - 1) \log q = \log \left\{ \frac{z}{S - q (S - z)} \right\}, \text{ und daraus}$$

$$n - 1 = \log \left\{ \frac{z}{S - q (S - z)} \right\} : \log q$$

ad XVII. Es ist $S = \frac{z q - a.}{q - 1}$

Man setze für q seinen Werth $\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$, so entsteht die Formel Nro XVII.

ad XVIII. Es ist $S = \frac{a (q^n - 1)}{q - 1}$

Man setze für a seinen Werth $\frac{z}{q^{n-1}}$, so entsteht die Formel Nro. XVIII.

ad XIX. und XX. Man sehe im §. 32.

---

§. 34.

Beispiele:

1) Ein Gläubiger macht mit seinem Schuldner den Vertrag, daß dieser im ersten Jahre nur 2 Gulden, in jedem folgenden aber dreimal so viel, als im vorhergehen-

den bezahlen solle. Nach 8 Jahren war die ganze Schuld getilgt. Wie groß war sie?

Hier ist $a = 2$,
$q = 3$,
$n = 8$; folglich wird
$S = 6560$ fl.

2) Dem Erfinder des Schachspieles wurde zur Belohnung seine Bitte bewilligt, ihm nämlich für das erste Feld des Schachbretes 1 Weizenkorn, für das zweite Feld 2, für das dritte 4, und so fort für jedes folgende Feld immer doppelt so viel Weizenkörner zu geben, als für das vorhergehende; wie groß ist die Anzahl der verlangten Körner?

Hier ist $a = 1$,
$q = 2$,
$n = 64$;

Da nun $2^2 = 4$
$2^4 = 16$
$2^8 = 256$
$2^{16} = 65536$
$2^{32} = 4294^{I}\ 967\ 296$
und $2^{64} = 18^{III}\ 446\ 744^{II}073\ 709^{I}\ 551616$ ist,
so wird $S = 18^{III}\ 446\ 744^{II}073\ 709^{I}\ 551615$ Körner.

Nimmt man nun an, daß ungefähr 2760 Körner vom mittleren Weizen 4 Loth (bayer. Gewicht) wiegen, der bayer. Metzen aber 49 Pf. 15 ½ Loth wiegt, so kommen auf das Scheffel $6^{I}555690$ Körner, folglich beträgt die ganze Summe $2^{II}\ 813\ 855^{I}\ 455\ 903$ Scheffel. Würde man nun täglich eine Million Scheffel entrichten, so würden doch mehr als 7709 Jahre zur völligen Abzahlung erfordert.

Würde man Heller anstatt der Weizenkörner nehmen, so betrüge die Summe

38 430^{II} 716 820^{I} 228 232 fl. 3 Kr. 1 Hl.

Nimmt man nun an, daß 100 Personen ohne Unterlaß, in jeder Sekunde jede Person 10 Karolinen bezahlte, so würden sie über 108716 Jahre zu zählen haben!

Vierter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

A.) Von den Logarithmen überhaupt.

§. 35.

Erklär. 1) Der Exponent der Potenz, zu welcher eine bestimmte Zahl~~, die jedoch~~ erhoben werden muß, um einer gegebenen Zahl gleich zu seyn, heißt der Logarithmus dieser letztern Zahl.

2) Jene erstere Zahl heißt die Grundzahl oder Basis des Logarithmus.

Das ist: wenn $m = b^x$ ist, so
ist $\log m = x$, und
b ist die Basis.

3) Die Logarithmen, die einer jeden Zahl für einen bestimmten für die Basis angenommenen Werth entsprechen, bilden ein logarithmisches System.

Folg. 1.) Jene Zahl, welche man zur Grundzahl annimmt, muß von der Einheit verschieden seyn; denn die Einheit als Grundzahl gibt zu keiner von 1 verschiedenen Zahl einen Logarithmus, weil jede Potenz von 1 immer wieder gleich 1 ist.

2) Da jede positive, sowohl ganze als gebrochene Zahl, die Einheit ausgenommen, wenn sie nach und nach zu allen möglichen Potenzen, sowohl mit ganzen als gebrochenen Exponenten, erhoben wird, jeder andern gegebenen Zahl gleich gemacht werden kann, so kann die Basis alle Werthe, den von 1 ausgenommen, erhalten.

3) Da jeder Werth der Basis ein anderes System von Logarithmen gibt, so muß es unzählig viele logarithmische Systeme geben.

4) Jenes System, dessen Basis 10 ist, heißt das dekadische, gemeine oder briggische System.

5) Da immer $b^0 = 1$ ist, so folgt

$o = \log 1$, und zwar in jedem Systeme, weil die eben gemachte Folgerung vom Werthe der Basis b unabhängig ist.

§. 36.

Auch durch folgende, auf die Progressionslehre sich stützende Betrachtungen, gelangt man zum Begriffe des Logarithmus.

1) In jeder geometrischen Progression, deren erstes Glied 1 ist, sind alle Glieder Potenzen vom zweiten Gliede; denn wenn man in der allgemeinen Formel (§. 30., Folg. 7.) $a = 1$ setzt, so verwandelt sie sich in

$$1, q, q^2, q^3, \ldots\ldots q^{n-1}$$

2) Wenn man eine geometrische Reihe, deren erstes Glied 1, und deren zweites Glied von 1 verschieden ist, (in welchem Falle also alle Glieder Potenzen des zweiten Gliedes sind) mit einer arithmetischen Reihe verbindet, deren erstes Glied o, und deren Differenz 1 ist, so werden die Glieder dieser arithmetischen Reihe die Logarithmen der entsprechenden Glieder der geometrischen Reihe seyn

Es sey allgemein das zweite Glied der geometrischen Reihe b, und dann in einer bestimmten Zahl z. B. 2, so wird man folgende Reihen haben:

A) 1, b, b^2, b^3, b^4 . . . . .

B) $\begin{cases} 1, 2, 4, 8, 16, \ldots \\ 1^0 . 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots \end{cases}$

C) 0, 1, 2, 3, 4, ... :

und es wird seyn

$$\log 4 \text{ oder } \log 2^2 = 2$$

$$\log 8 \text{ oder } \log 2^3 = 3 \text{ u. s. w.}$$

Jedes Glied der Reihe C gibt die Anzahl der Verhältnisse für die ober ihm stehenden Glieder der Reihe B an; z. B. die Zahl 4 in der Reihe C zeigt an, daß das Verhältniß 1 : 16 aus den 4 gleichen Verhältnissen 1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 zusammengesetzt sey; daher der Name Logarithmus (Λόγων ἀριθμὸς d. i. Anzahl der Verhältnisse.)

§. 37.

Lehrs. Für eine Basis, die größer als 1 ist, gehört

a) zu jedem positiven Logarithmus auch eine positive Zahl, die größer ist als 1, und zwar desto größer, je größer der Logarithmus ist; und

b) zu jedem negativen Logarithmus eine positive Zahl, die kleiner ist als 1, und zwar desto kleiner, je größer der Logarithmus ist.

Bew. für a) Denn ist $b > 1$ und x positiv, so ist b^x stets positiv, und

$$b^x > 1.$$

~~$x > y$~~

~~$b^x > b^y$.~~

Ferner für $x > y$ muß auch

$$b^x > b^y \text{ seyn.}$$

Bew. für b) Ist $b > 1$, so ist b^x positiv,

und $b^x > 1$; mithin auch

$$\frac{1}{b^x} = b^{-x} \text{ positiv, und}$$

$$b^{-x} < 1.$$

Ferner für $x > y$ wird

$$b^x > b^y, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{b^x} < \frac{1}{b^y} \text{ oder } b^{-x} < b^{-y}.$$

Folg. Daher gehören für eine Basis, die größer ist als 1, zu den positiven Zahlen, die größer sind als 1, auch positive Logarithmen; zu den positiven Zahlen aber, die kleiner sind als 1, gehören negative Logarithmen. Den negativen Zahlen entsprechen gar keine Logarithmen, sondern diese sind bloße Zahlformen.

§. 38.

Lehrs. Für eine Basis, die kleiner als 1 ist, gehört

a) zu jedem positiven Logarithmus eine positive Zahl, die kleiner ist als 1, und zwar desto kleiner, je größer der Logarithmus ist; und

b) zu jedem negativen Logarithmus eine positive Zahl, die größer ist als 1, und zwar desto größer, je größer der Logarithmus ist.

Bew. für a) Denn für $b < 1$, und eine positive Zahl x ist b^x stets positiv und $b^x < 1$;

Ferner für $x > y$ muß

$b^x < b^y$ seyn.

Bew. für b) Für $b < 1$ ist b^x positiv und $b^x < 1$;

$$\text{mithin auch } \frac{1}{b^x} = b^{-x} \text{ positiv, und}$$

$$b^{-x} > 1.$$

Ferner für $x > y$ wird

$$b^x < b^y, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{b^x} > \frac{1}{b^y}, \text{ oder } b^{-x} > b^{-y}.$$

Folg. 1) Daher gehören für eine Basis, die kleiner ist als 1, zu den positiven Zahlen, die größer sind als 1, negative Logarithmen; zu den positiven Zahlen aber, die kleiner sind als 1, auch positive Logarithmen.

2) Zu ungleichen Zahlen gehören auch ungleiche Logarithmen. Ist die Grundzahl größer als 1, und sind auch die Zahlen größer als 1, so gehört zur größern Zahl auch der größere Logarithmus; sind aber die Zahlen kleiner als 1, so gehört zur größern Zahl der kleinere Logarithmus. Gerade das Gegentheil trifft ein, wenn die Basis kleiner ist, als 1.

3) Zu jeder Zahl gehört nur ein Logarithmus, und zu jedem Logarithmus nur eine Zahl; weil zu ungleichen Logarithmen auch ungleiche Zahlen, und zu ungleichen Zahlen auch ungleiche Logarithmen gehören.

4) Zu gleichen Zahlen gehören gleiche Logarithmen;

denn es sey $M = b^x$; so ist $x = \log M$;

und es sey $N = b^y$, so ist $y = \log N$.

Ist nun $M = N$, so folgt

$b^x = b^y$, mithin

$x = y$, oder

$\log M = \log N$.

§. 39.

Lehrs. Der Logarithmus eines Produkts ist der Summe der Logarithmen aller Faktoren gleich; d. i.

$$\log (A.\,B.\,C.\ldots) = \log A + \log B + \log C + \ldots$$

Bew. Für die Basis b ist

$A = b^x$; mithin $x = \log A$

$B = b^y$; mithin $y = \log B$

$C = b^z$; mithin $z = \log C$

Da nun $A.\,B.\,C.\ldots = b^{x+y+z\ldots}$ ist, so folgt hieraus nach §. 35.

$$\log (A.\,B.\,C.\ldots) = x + y + z \ldots \text{ d. i.}$$
$$= \log A + \log B + \log C \ldots$$

Folg. 1) Mit Hilfe dieses Satzes verwandelt sich die Multiplikation in eine Addition.

2) Daher erhält man aus den Logarithmen der Primzahlen durch Addition die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen; z. B.

$$\log 3 + \log 5 = \log 15.$$

§. 40.

Lehrs. Man erhält den Logarithmus eines Quotienten, wenn man den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus des Dividends abzieht; d. i.

$$\log \frac{B}{A} = \log B - \log A.$$

Bew. Für die Basis b ist

$B = b^x$; mithin $x = \log B$; eben so

$A = b^y$; mithin $y = \log A$.

Da nun $\frac{B}{A} = b^{x-y}$ ist, so folgt hieraus nach §. 35.

$$\log \frac{B}{A} = x - y \text{ oder}$$

$$= \log B - \log A.$$

Folg. 1) Man erhält daher den Logarithmus eines Bruches, wenn man vom Logarithmus des Zählers den Log. des Nenners abzieht.

2) Mit Hilfe dieses Satzes verwandelt sich die Division in eine Subtraktion. —

§. 41.

Lehrs. Der Logarithmus der Potenz einer Zahl ist gleich dem Produkte des Potenzexponenten in den Logarithmus der Zahl; d. i.

$$\log (A\ ) = m \log A.$$

Bew. Es ist wieder

$A = b^x$; mithin $x = \log A$.

Da nun $A^m = b^{mx}$ ist, so folgt hieraus nach §. 35.

$$\log A^m = m x \text{ oder}$$
$$= m. \log A.$$

Folg. Mit Hilfe dieses Satzes verwandelt sich das Erheben der Zahlen zu Potenzen in eine Multiplikation.

§. 42.

Lehrs. Der Logarithmus der Wurzel einer Zahl wird erhalten, wenn man den Logar. der Zahl durch den Wurzelexponenten dividirt; d. i.

$$\log \sqrt[m]{A} = \frac{\log A}{m}.$$

Bew. Es ist wieder

$$A = b^x;\ \text{mithin } x = \log A.$$

Da nun $\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{b^x}$ oder $b^{\frac{x}{m}}$ ist, so folgt

$$\log \sqrt[m]{A} = \frac{x}{m} \text{ oder}$$
$$= \frac{\log A}{m}.$$

Folg. Mit Hilfe dieses Satzes verwandelt sich das Wurzelausziehen in eine Division.

B) Von den briggischen Logarithmen.

§. 43.

Erklär. 1) Nach §. 35. Folg. 4. heißt jenes Logarithmensystem, dessen Grundzahl 10 ist, das dekadische, briggische oder gemeine System, und die Logarithmen selbst für diese Grundzahl nennt man ebenfalls dekadische, gemeine oder briggische.

2) Die Reihen des §. 36, No. 2 verwandeln sich dann in folgende:

B.)	1 ,	10 ,	100 ,	1000 ,	10000 . . . . .
	1^0 ,	1^1 ,	1^2 ,	1^3 ,	1^4 . . . . .
C,)	0 ,	1 ,	2 ,	3 ,	4 . . . . .

Demnach ist $\log 1 = 0$

$\log 10 = 1$

$\log 100 = 2$ u. s. w.

Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 werden also größer, als 0 und kleiner, als 1, d. h. 0 nebst einem Bruche seyn; die Logar. der Zahlen zwischen 10 und 100 werden größer, als 1 und kleiner, als 2, d. h. 1 nebst einem Bruche seyn; u. s. w.

Dieser Bruch wird in der Form eines Dezimalbruches ausgedrückt, und zwar mit 10, mit 7, oder auch mit 5 Dezimalstellen.

3) Die Ganzen im Logar. nennt man die Charakteristik, oder Kennziffern; die Dezimalstellen aber die Mantisse derselben.

§. 44.

Lehrs. Die Kennziffern des Logarithmus einer Zahl, die größer ist, als 1, müssen um 1 kleiner seyn, als die Anzahl der ganzen Ziffern in der Zahl.

Bew. Die Zahl M enthalte m ganze Stellen, so ist

$$M < 10^m, \text{ mithin}$$

$$\log M < m.$$

Ferner ist $M \overline{\geq} 10^{m-1}$, mithin

$$\log M \overline{\geq} m - 1.$$

Es kann daher log M nur m — 1 Einheiten, und vielleicht noch einige Dezimalstellen enthalten.

Folg. Umgekehrt ist die Anzahl der ganzen Stellen einer Zahl um 1 größer, als die Kennziffer des Logarithmus.

§. 45.

Einige geschichtliche Bemerkungen.

Als Erfinder der Logarithmen wird Joh. Neper Baron von Marchiston, ein Schottländer (geb. 1550, gest. 1618) angegeben. Der Gebrauch der Logarithmen, wodurch das Leben des Rechners um mehr, als

die Hälfte verlängert wird, war also den alten und mittlern Zeiten nicht vergönnt.

Von Neper erschien das erste wirkliche Logarithmen-system. Heinrich Brigg, Professor der Geometrie zu Oxford, nahm zur Basis 10, und berechnete die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000; die Lücke von 20000 bis 90000 füllte ein Holländer, Adrian Vlacq aus. Die Berechnungsart aber, derer sich diese Männer bedienten, war jedoch noch äusserst langwierig und beschwerlich; man hat daher in neueren Zeiten leichtere Methoden ausgedacht.

Die so für die Zahlen berechneten Logarithmen werden in Tafeln oder Tabellen gebracht, aus denen man für jede Zahl den entsprechenden Logar., und umgekehrt für jeden Logar. die zugehörige Zahl findet. Die Kenntniß ihrer Einrichtung und ihres Gebrauchs wird man sich am besten dadurch erwerben, daß man solche Tafeln selbst zur Hand nimmt.

Unter den vorhandenen Logarithmentafeln sind die bekanntesten:

1) Der Thesaurus logarithmorum von Vega in Folio.

2) Das kleinere Werk von Vega unter dem Titel: Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch in zwei Bänden.

3) Die Tafeln von Callet (französisch.)

4) Die kleinen (äusserst bequemen) Tafeln von Lalande (französisch); übersetzt und vermehrt von Köhler.

5) Die Tafeln von Westphal.

6) Die Tafeln von Schulze, u. s. w.

§. 46.

Aufg. Den Logarithmus einer Zahl für eine andere Basis (ß) zu finden, wenn er für irgend eine Basis (b) schon bekannt ist.

Aufl. Wenn man die Logar. für die Basis ß mit

Log, jene aber für die Basis b mit log bezeichnet, so ist

$$\text{Log. } N = \frac{\log N}{\log \beta}.$$

Bew. Es sei $N = b^x$, mithin $x = \log N$,
und $N = \beta_y$, mithin $y = \text{Log } N$.

Hieraus folgt $b^x = \beta^y$ und
$\log (b^x) = \log (\beta^y)$, oder
$x = y. \log \beta$; daher auch
$y = \dfrac{x}{\log \beta}$ oder
$N = \dfrac{\log N}{\log \beta}$.

Nimmt man $\beta = 2,7182818\ldots$ an, so erhält man das natürliche Logarithmensystem.

C. Anwendung der Logarithmen.

I) Auf Rechnungen mit Ziffern.

§. 47.

Aufg. Den briggischen Logarithmus eines gemeinen Bruchs zu finden.

Aufl. I) Ist der Bruch ein unächter, so ziehe man vom Logarithmns des Zählers jenen des Nenners ab, (nach §. 40. Folg. 1.)

II) Ist der Bruch ein ächter, so wird (nach §. 37. Folg.) sein Logarithmus negativ werden. Man zieht nämlich vom Logarithmus des Nenners jenen des Zählers ab, und gibt dem Reste das Zeichen —; denn

$$\log \tfrac{3}{4} = \log 3 - \log 4$$
$$= -(\log 4 - \log 3)$$
$$= -\log \frac{4}{3};$$

$$\log 4 = 0,60206$$
$$\log 3 = 0,47712$$
$$\log \tfrac{3}{4} = -0,12494.$$

Folg. Daher haben zwei Brüche, von denen der eine der umgekehrte vom andern ist, gleiche Logarithmen, aber mit entgegengesetzten Zeichen;

d. i. $\log \frac{M}{N} = -\log \frac{N}{M}$.

§. 48.

Aufg. Den Logar. eines Dezimalbruches zu finden.

Aufl. Man bestimme den Logar. wie für eine ganze Zahl, und ziehe der Charakteristik so viele Einheiten ab, als der gegebene Bruch Dezimalstellen enthält.

Bew. $\log \frac{A}{10^m} = \log A - \log 10^m$

$= \log A - m$, da $\log 10 = 1$ ist.

Beisp. $\log 0,436 = 2,63949 - 3$;

denn $\log 0,436 = \log \frac{436}{10^3} = 2,63949 - 3$.

§. 49.

Aufg. Die Dezimalstellen eines negativen Logarithmus positiv zu machen.

Aufl. Man darf nur die nächst höhere ganze Zahl hinzuaddiren, so erhält man positive Dezimalstellen. Allein um den ursprünglichen Werth wieder herzustellen, muß man die nämliche ganze Zahl mit dem Zeichen — dem Resultate wieder beisetzen; dadurch werden die Dezimalstellen positiv, und nur die ganzen Stellen bleiben negativ.

Z. B. $-3,45736$
$+4,$
$0,54264 - 4.$

Bew. Offenbar ist $-N = M - N - M$, wenn M die nächst höhere ganze Zahl bedeutet.

§. 50.

Aufg. Mit Hilfe der Logarithmen zu multipliziren.

Aufl. Man addire die Logarithmen aller Faktoren zusammen, und suche die, zu der Summe, als Logarithmus, gehörige Zahl.

Bew. Aus §. 39.

Beisp. Man soll 234 mit 6 multipliziren.

$$\log 234 = 2.36922$$
$$\log 6 = 0.77815$$
$$\log (234 \times 6) = 3.14737$$
$$= \log 1404;\ \text{also}$$
$$234 \times 6 = 1404.$$

§. 51.

Aufg. Mit Hilfe der Logarithmen zu dividiren.

Aufl. Man ziehe den Log. des Divisors von dem des Dividends ab, und suche die zur Differenz, als Logarithmus, gehörige Zahl.

Bew. Aus §. 40.

Beisp. Man soll 1404 durch 234 dividiren.

$$\log 1404 = 3.14737$$
$$\log 234 = 2.36922$$
$$\log \left(\frac{1404}{234}\right) = 0.77815$$
$$= \log 6;\ \text{also}$$
$$\frac{1404}{234} = 6.$$

§. 52.

Aufg. Mit Hilfe der Logar. eine Potenz zu finden.

Aufl. Man multiplizire den Logar. der Zahl mit dem Exponenten, und suche zu dem Produkte, als Logarithmus, die zugehörige Zahl.

Bew. Aus §. 41.

Beisp. $(12)^3$ wird 1728;

denn $\log 12 = 1,07918$
$$\times 3$$
$$\log (12^3) = 3,23754$$

$= \log 1728$; also

$12^3 = 1728$.

Oder: $(0,85378)^4$ wird $0,53135$;

denn $\log 0,85378 = 0.93135 - 1$

$$\frac{\quad 4 \quad}{\log \{(0,85378)^4\} = 3,72540 - 4}$$

$= \log 0,53135$; also

$(0,85378)^4 = 0,53135$.

§. 53.

Aufg. Mit Hilfe der Logarithmen die Wurzel einer Zahl zu finden.

Aufl. Man dividire den Logarithmus der Zahl durch den Wurzelexponenten, und suche zu dem Quotienten, als Logarithmus, die zugehörige Zahl.

Bew. Aus §. 42.

Beisp. $\sqrt[3]{1728} = 12$; denn

$\log 1728 = 3,23754$

$: 3$

$$\frac{\log 1728}{3} = 1,07918$$

$= \log 12$; also

$\sqrt[3]{1728} = 12$.

Sollten bei einem Logarithmus mit negativen Kennziffern die letzteren durch den Wurzelexponenten nicht theilbar seyn, so darf man nur die negativen Kennziffern um so viel vermehren, daß sie sich theilen lassen, und eben so viele Ganze der positiven Mantisse vorsetzen.

Z. B. Um $\sqrt[5]{0,0078356}$ zu finden, hat man

$\log 0.0078356 = 0,89407 - 3$

$= 2,89407 - 5$, mithin

$\log \sqrt[5]{0,0078356} = 0,57881 - 1$ und

$\sqrt[5]{0,0078356} = 0,37915$.

§. 54.

Aufg. Mit Hilfe der Logarithmen das fehlende Glied einer geometrischen Proportion zu finden.

Aufl. Es ist $x = \frac{b\,c}{d}$; (für das erste fehlende Glied)

$x = \frac{a\,d}{c}$; (. . . zweite . . .)

$x = \frac{a\,d}{b}$; (. . . dritte . . .)

$x = \frac{b\,c}{a}$; (. . . vierte . . .)

folglich mit Anwendung der Logarithmen

wird 1) $\log x = \log b + \log c - \log d$

2) $\log x = \log a + \log d - \log c$

3) $\log x = \log a + \log d - \log b$

3) $\log x = \log b + \log c - \log a$

Besonders in der Trigonometrie bei der Auflösung und Berechnung der Dreiecke wird hievon Anwendung gemacht.

Anstatt den dritten Logarithmus von der Summe der beiden andern abzuziehen, kann man die dekadische Ergänzung desselben hinzuaddiren; dann muß man aber von der Kennziffer der Summe der drei Logarithmen 10 abziehen.

Diese dekadische Ergänzung eines Logarithmen findet man, indem man ihn von 10 abzieht.

Denn es bezeichne C die dekadische Ergänzung der Zahl N, und U die höhere Einheit, so ist

$N + C = U$ oder $N = U - C$

folglich $A - N = A + C - U$.

Beispiel. $x = \frac{36.48}{24}$ zu berechnen.

Hier wird also

$\log 36 = 1,55630$

$\log 48 = 1,68124$

$\log (36.48) = 3,23754$

$$\log 24 = 1,38021$$
$$\log x = 1,85733$$
$$x = 72.$$

Oder mit der Ergänzung:

$$\log (36.48) = 3,23754$$
$$\text{compl. decad. } \log 24 = 8,61979$$
$$\log x = 11,85733 - 10$$
$$x = 72.$$

Bei der stätigen Proportion war

1) $x = \frac{c^2}{b}$; (für das erste fehlende Glied.)

2) $x = \sqrt{ab}$; (für das mittlere . . . . .)

3) $x = \frac{c^2}{a}$; (für das dritte . . . . . .)

folglich mit Logarithmen

1) $\log x = 2 \log c - \log b$;

2) $\log x = \frac{\log a + \log b}{2}$;

3) $\log x = 2 \log c - \log a$.

Aus Nro. 2. folgt, daß, wenn drei Zahlen eine geometrische stätige Proportion bilden, ihre Logarithmen eine arithmetisch stätige bilden.

II. Anwendung der Logarithmen auf die Auflösung der Exponentialgleichungen.

§. 52.

Erklär. Eine transzendente Gleichung, in welcher die Unbekannte in einem Potenzexponenten vorkömmt, heißt eine Exponentialgleichung; z. B. $A^x = m$.

Solche Gleichungen lassen sich nur durch Hilfe der Logarithmen auflösen.

§. 53.

Aufg. Eine Exponentialgleichung von der Form

$$A.B^x = C$$

aufzulösen.

Aufl. Es wird $x = \frac{\log C - \log A}{\log B}$ seyn.

Bew. Nach §§. 39, 40, 41 und 42.

Beisp. Als Beispiele können dienen die Gleichungen im §. 33. von Nro. XIII. bis Nro. XVII.

Aus der Gleichung

$7 . 3^{\frac{7x}{2x+1} + 2} = 1701$, folgt, wenn man $\frac{7x}{2x+1} + 2 = X$ setzt,

$$X = \frac{\log 1701 - \log 7}{\log 3} = 5, \text{ oder}$$

$$\frac{7x}{2x+1} + 2 = 5, \text{ woraus}$$

$$x = 3 \text{ wird.}$$

Eben so wird aus

$11 . 5^{2x^2-1} = 713$ erhalten

$$2x^2 - 1 = \frac{\log 713 - \log 11}{\log 5}, \text{ mithin}$$

$$x = \pm \sqrt{\left\{\frac{\log 713 - \log 11}{2 \log 5} + \frac{1}{2}\right\}}$$

$$= \pm 1, 31318.$$

§. 54.

Aufg. Eine Exponentialgleichung von der Form

$$A. B^{2x} + C. B^x = D$$

aufzulösen.

Aufl. Man suche die Werthe von y aus der Gleichung

$$A y^2 + Cy = D;$$

dann ist $x = \frac{\log y}{\log B.}$

Bew. Wenn man $B^x = y$ setzt, so wird die gegebene Form der Gleichung sich in

$$A y^2 + C y = D \text{ verwandeln,}$$

woraus man die Werthe von y sucht.

Da nun $B^x = y$ gesetzt wurde, so
wird $x \log B = \log y$ oder

$$x = \frac{\log y}{\log B.}, \text{ weil nun } y \text{ eine Bekannte ist.}$$

Beisp. Aus der Gleichung

$$6.\ 3^{4x^2 - 6x + 2} - 5.\ 3^{2x^2 - 3x + 1} = 1$$

die Unbekannte x zu finden.

Wenn man $2x^2 - 3x + 1 = X$ setzet, so wird
$4x^2 - 6x + 2 = 2X$, folglich hat
die gegebene Gleichung die Bedingungsform.

Man setze demnach

$3^{2x^2 - 3x + 1} = y$, so erhält
man $6.\ y^2 - 5y = 1$, mithin
$y = 1$ und
$y = -\frac{1}{6}$.

Aus $y = 1$ folgt $3^{2x^2 - 3x + 1} = 1$ und daher
$2x^2 - 3x + 1 = 0$, woraus
$x = 1$ und
$x = \frac{1}{2}$ wird.

Aus $y = -\frac{1}{6}$ folgt $3^{2x^2 - 3x + 1} = -\frac{1}{6}$, mithin

$$2x^2 - 3x + 1 = -\frac{\log - 6}{\log 3},$$

woraus $x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{16} - \frac{\log - 6}{2 \log 3}\right\}}$ wird.

Da diese letztern Werthe unmöglich sind, so hat die gegebene Gleichung nur die beiden möglichen Wurzeln $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$.

§. 55.

I) Aus der Gleichung

$$3.\ 8^{x^2 - 1} + 5.\ 4^{3x^2 + 1} = 1856$$

die Unbekannte x zu bestimmen.

Aufl. Diese Gleichung hat zwar weder die Form des §. 53, noch die des §. 54. Allein durch einige zweckmäßige Verwandlungen läßt sie sich doch auf die Form des §. 54 bringen.

Nämlich da $8 = 2^3$ und $4 = 2^2$ ist, so

wird $8^{4x^2-1} = 2^{12x^2-3}$ und

$4^{3x^2+1} = 2^{6x^2+2}$; dadurch wird die gegebene Gleichung

$$3 . 2^{12x^2-3} + 5 . 2^{6x^2+2} = 1856.$$

Nun ist ferner $2^{12x^2-3} = \frac{2^{12x^2+4}}{2^7}$, daher erhält man die Gleichung

$$\frac{3 . 2^{12x^2+4}}{2^7} + 5 . 2^{6x^2+2} = 1856,$$

welche sich nach §. 54. auflösen läßt.

Die weitere Rechnung zur Selbstübung des Lernenden.

II. Aus der Gleichung

$$S = C . q^n \times \frac{A (q^n - 1)}{q - 1}$$

die Unbekannte n zu suchen.

Aufl. Man hat zuerst

$$S (q - 1) = C (q - 1) q^n + A (q^n - 1);$$

dann $S (q - 1) + A = \{C (q - 1) + A\} q^n$; folglich

(nach §. 53.) $n = \frac{\log \{S(q-1) + A\} - \log \{C (q-1) + A\}}{\log q}$

Anwendung der Progressionslehre auf die zusammengesetzte Zinsrechnung.

§. 56.

Erklär. Die Interessen, oder die Zinsen, welche für eine gelehnte Summe Geldes (Capital) entrichtet werden, sind entweder

1) einfache Zinsen, welche nur vom Capital allein entrichtet werden, selbst wenn mehrere Zahlungstermine verflossen sind, und die treffenden fälligen Zinsen nicht entrichtet werden, oder

2) Zinseszinsen (zusammengesetzter Zins), wenn der fällige Zins nicht abgetragen, sondern von seiner Zahlzeit an als Capital betrachtet wird, (zum Capital geschlagen wird), folglich ebenso wie dieses verzinset werden muß.

§. 57.

Erklär. Die Rechnung, wodurch die Zinseszinsen bestimmt werden, heißt zusammengesetzte Zinsesrechnung.

Es kommen hierbei verschiedene Größen vor, welche mit eigenen Zeichen bezeichnet werden sollen; nämlich

das Capital mit C,

die Procente mit p,

die Jahre der Ausleihezeit mit n, und das Endcapital, d. h. die Summe des ausgeliehenen Capitals und der Zinseszinsen nach einer gewissen Anzahl Jahre mit S.

§. 58.

Lehrs. Wird ein Capital C zu p Procenten für eine gewisse Zeit (z. B. für ein Jahr) angelegt, so wird, wenn man immer die Zinsen zu dem Capitale schlägt, nach n Jahren das Endcapital

$$S = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ seyn.}$$

Bew. Ein Capital ist zu p Procenten angelegt, heißt, für jeden Gulden ~~Hundert~~ sollen $\frac{p}{100}$ jährliche Interessen bezahlt werden; demnach werden die Interessen für das Capital C am Ende eines Jahres $C.\frac{p}{100}$ betragen.

Das Capital sammt den Interessen ist also nach dem ersten Jahre $a = C + C\frac{p}{100} = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Nach dem zweiten Jahre, während dessen Verlauf also a das angelegte Capital war, ist wieder

$$b = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$= C.\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Aus dem nämlichen Grunde ist nach dem dritten Jahre

$$c = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$c = C.\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ u. s. w.}$$

Die Capitale sammt den Interessen am Ende der einzelnen Jahre bilden daher eine geometrische Progression, bei welcher das erste Glied $= C\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ und der

Quotient $= \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ ist; folglich ist das letzte Glied für n Glieder, d. h. das Capital sammt allen Zinseszinsen, oder

$$S = C \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$$
$$= C \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n},$$

woraus sich eine jede der vier Größen p, n, C, S finden läßt, wenn die drei übrigen bekannt sind; daher entstehen 4 Aufgaben; nämlich man soll suchen

1.) S aus p, n, C;
2.) C aus S, p, n;
3.) p aus n, C, S und
4.) n aus p, C, S.

Auflösung der ersten Aufgabe:

Hier ist

$$S = C \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n}.$$

Beisp. Zu welcher Summe erwächst ein Capital von 1000 Gulden, zu 5 Procenten angelegt, sammt Zinseszinsen in 60 Jahren?

Hier ist C = 1000,
n = 60 und
p = 5; also wird mit Hilfe der Logarithmen

$$\log S = \log C + n. \log \left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ oder}$$
$$\log S = \log 1000 + 60. \log \left(\tfrac{21}{20}\right); \text{ d. i.}$$

$$\log 1000 = 3{,}0000000$$
$$\log \left(\tfrac{21}{20}\right) = 0{,}0211893$$
$$60. \log \left(\tfrac{21}{20}\right) = 1{,}2713580$$
$$\text{folglich } \log S = 4{,}2713580$$
$$S = 18679{,}2 \text{ Gulden.}$$

Aufl. der zweiten Aufgabe:

Aus $S = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ wird

$$C = S : \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Beisp. Wie groß muß das Capital seyn, damit es in 50 Jahren, zu 5 Procenten angelegt, sammt Zinseszinsen 1000 Gulden betrage?

Hier ist $n = 50$
$p = 5$
$S = 1000$; also wird

$$\log C = \log 1000 - 50.\log\left(\tfrac{21}{20}\right);$$ d. i.

$$\log 1000 = 3{,}0000000$$
$$50.\log\left(\tfrac{21}{20}\right) = 1{,}0594650$$
$$\log C = 1{,}9405350$$
$$C = 87{,}204 \text{ Gulden},$$
$= 87$ Gulden, 12 Kr. und 1 Pf.

Aufl. der dritten Aufgabe:

Aus $S = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ wird

$$\sqrt[n]{\frac{S}{C}} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ oder}$$

$$100\sqrt[n]{\frac{S}{C}} = 100 + p \text{ oder}$$

$$\log 100 + \frac{\log S - \log C}{n} = \log(100 + p).$$

Beisp. Zu wie viel Prozenten ist ein Capital von 87 Gulden, 12 Kr. und 1 Pf. aufgelegt, wenn es in 50 Jahren sammt Zinseszinsen 1000 Gulden tragen soll?

Hier ist $n = 50$
$C = 87{,}204$
$S = 1000$; folglich wird

$$\frac{\log S - \log C}{n} = 0{,}02119$$
$$\log 100 = 2{,}00000$$
$$\log (100 + p) = 2{,}02119$$
$$= 105, \text{ also}$$
$$p = 5.$$

Aufl. der vierten Aufgabe:

Aus $S = C\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ wird

$$\log \frac{S}{C} = n. \log \left(1+\frac{p}{100}\right)$$

$$\frac{\log S - \log C}{\log \left(1+\frac{p}{100}\right)} = n.$$

Beisp. Wie viele Jahre müssen vergehen, bis die Zinseszinsen eines zu 5 Prozenten aufgelegten Capitals dem Capitale gleich werden?

Das Capital sey eine beliebige Zahl, z. B. 1000 Gulden, so werden Capital sammt Zinseszinsen 2000 Gulden seyn; demnach

ist hier $S = 2000$
$p = 5$
$C = 1000$; folglich wird

$$n = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14, 2 \text{ Jahre.}$$

§. 59.

Lehrs. Wird ein Capital C zu p Prozenten angelegt, und nach jedem Jahre noch eine Summe A hinzugefügt, so wird nach n Jahren die Summe des gesammten aufliegenden Capitals mit Zinseszinsen

$$S = C\, q^n + \frac{A\,(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ wenn}$$

man $1 + \frac{p}{100} = q$ setzt.

Bew. Am Ende des ersten Jahres beträgt Capital sammt Interessen $C\left(1+\frac{p}{100}\right)$; da man es nun um A vermehrt, so ist nach Verlauf des ersten Jahres das ganze aufliegende Capital:

$$a = C\left(1+\frac{p}{100}\right) + A = C.\ q + A$$

Am Ende des zweiten Jahres gibt nun dieses Capital sammt den Zinsen, nebst noch hinzukommendem A

$$b = a.\ q + A$$
$$= q^2 C + q A + A$$

Eben so wird nach dem dritten Jahre die ganze Summe

$$c = q^3 C + q^2 A + q A + A$$

Ebenso nach dem Ende des vierten Jahres

$$d = q^4 C + q^3 A + q^2 A + q A + A,$$

und nach n Jahren wird die ganze Summe auf

$$S = C q^n + A q^{n-1} + A q^{n-2} + \ldots + A q + A$$

anwachsen.

Hier bilden alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, eine geometrische Progression, deren Quotient $\frac{1}{q}$, und deren Summe

$$\frac{A q^{n-1} - A q^{n-1}\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}} = \frac{A q^n - A}{q-1} \text{ ist.}$$

Man erhält also

$$S = C q^n + \frac{A(q^n - 1)}{q-1}.$$

Auch hier läßt sich jede der 5 Größen finden, wenn die 4 übrigen bekannt sind; daher entstehen hier folgende 5 Aufgaben:

1) S aus A, C, p, n;
2) A aus S, C, p, n;
3) C aus S, A, p, n;

4) n aus S, A, C, p, und
5) p aus S, A, C, n.

Aufl. der ersten Aufgabe.

$$S = C. q^n + \frac{A(q^n - 1)}{q - 1.}$$

Beisp. Ein Capital von 20 Gulden ist zu 5 Prozenten aufgelegt, und wird nebst den Zinsen jährlich um 15 Gulden vermehrt, wie groß wird die ganze Summe nach 40 Jahren?

Hier ist $C = 20$,
$A = 15$,
$p = 5$,
$n = 40$, und
$q = 105$, mithin wird

$$S = 20 \cdot (1{,}05)^{40} + \frac{15 \cdot \{(1{,}05)^{40} - 1\}}{0{,}05}$$

Berechnet man die zwei Theile mit Logarithmen, so wird, wenn man den ersten Theil mit M, den zweiten mit N bezeichnet,

$$\begin{array}{rl} 1) \log 20 & = 1{,}30103 \\ 40 \cdot \log 1{,}05 & = 0{,}84757 \\ \hline \log M & = 2{,}14860, \text{ und} \\ M & = 140{,}8. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Ferner } \log 15 & = 1{,}17609 \\ \log 6{,}04 & = 0{,}78104 \\ \hline & 1{,}95713 \\ \log 0.05 & = 0.69897 - 2 \\ \hline \log N & = 3{,}25816, \text{ und} \\ N & = 1812. \end{array}$$

Da nun $S = M + N$ gesetzt wurde, so wird
$S = 1952{,}8.$

Aufl. der zweiten Aufgabe.

$$\text{Es wird } A = \frac{S(q-1) - C q^n (q-1)}{q^n - 1.}$$

Beisp. Es sey, wie vorher,

$$S = 1952,8$$
$$p = 5$$
$$C = 20$$
$$n = 40;$$ so wird

wenn man $S(q-1) = M$,

$$Cq^n(q-1) = N$$ und

$$q^n = P$$ setzt,

$$\log S = 3{,}29066$$
$$\log(q-1) = 0{,}69877 - 2$$
$$\log M = 1{,}98963$$
$$M = 97{,}64.$$

Ferner $\log Cq^n = 2{,}14860$

$$\log(q-1) = 0{,}69877 - 2$$
$$\log N = 0{,}84757$$
$$N = 7{,}04.$$
$$\log P = 0{,}84757,$$
$$q^n = 7{,}04,$$
$$q^n - 1 = 6{,}04.$$
$$M - N = 90{,}60;$$ daher

$$A = \frac{90{,}60}{6{,}04} = 15.$$

Aufl. der dritten Aufgabe.

Hier wird $C = \frac{S(q-1) - A(q^n - 1)}{q^n(q-1)}.$

Beisp. Es sey wieder, wie vorher,

$$S = 1952,8,$$
$$p = 5,$$
$$n = 40$$
$$A = 15;$$ so wird

$S(q-1) = 97{,}64$ (wie vorher).

Ferner ist $\log A = 1{,}17609$

$$\log(q^n - 1) = 0{,}78104$$
$$\log A.(q^n - 1) = 1{,}95713$$

$$A.(q^n - 1) = 97{,}64$$

dann ist noch $n \log q = 0{,}84757$

$$\log (q-1) = 0{,}69897 - 2$$

$$\log q^n (q-1) = 0{,}54654 - 1;$$

folglich $\log C = 1{,}30103$ und

$$C = 20.$$

Aufl. der vierten Aufgabe.

Man sehe §. 55. Nro. II. wo gefunden wurde

$$n = \frac{\log \{S(q-1)+A\} - \log \{C(q-1)+A\}}{\log q}$$

Beisp. Wenn die früheren Annahmen für S, q, A, C bleiben, so wird

$$S(q-1) + A = 112{,}64$$

$$C(q-1) + A = 16;$$

folglich $\log 112{,}64 = 2{,}05170$

$$16 = 1.20412;$$ demnach

$\log 112{,}64 - \log 16 = 0{,}84758$, und

$$n = \frac{0.84758}{0.02119} = 40.$$

§. 60.

Lehrs. Wird ein Capital C zu p Prozenten aufgelegt, und man nimmt, anstatt solches jährlich mit einer Summe zu vermehren, nach jedem Jahre die Summe A davon weg, so ist nach n Jahren der Rest

$$R = C q^n - \frac{A(q^n - 1)}{q-1},$$ wenn wieder

$$1 + \frac{p}{100} = q$$ ist.

Bew. Man kann diesen Ausdruck entweder unmittelbar aus dem Ausdrucke des §. 59. ableiten, indem man dort A negativ, und R anstatt S setzt, oder man kann den Beweis aus den nämlichen Gründen, und in derselben Ordnung, wie im §. 59., vollständig durchführen.

Auch hier läßt sich wieder jede der 5 Größen R, C, q, n und A finden, wenn die 4 übrigen bekannt sind.

Es wird nämlich

1) aus R, C, q und n

$$A = \frac{C q^{n} \cdot (q-1) - R (q-1)}{q^{n} - 1};$$

2) aus R, q, n und A

$$C = \frac{R (q-1) + A (q^{n} - 1)}{q^{n} (q-1);}$$

$$3)\ n = \frac{\log \{R (q-1) - A\} - \log \{C (q-1) - A\}}{\log q.}$$

oder auch

$$= \frac{\log \{A - R (q-1)\} - \log \{A - C (q-1)\}}{\log q.}$$

Beispiele. 1) Ein Capital von 6000 Gulden ist zu 5 Prozenten aufgelegt; wie viel darf man nach jedem Jahre vom Capital sammt den Zinseszinsen hinwegnehmen, damit nach 30 Jahren Capital sammt Zinseszinsen aufgezehrt sey?

Hier ist $R = 0$,
$p = 5$,
$C = 6000$.
$n = 30$; mithin wird

$$\log 6000 = 3{,}77815$$
$$30 \log 1{,}05 = 0{,}63568$$
$$\log 0{,}05 = 0{,}69897 - 2$$
$$3{,}11280$$
$$\log (1{,}05^{30} - 1) = 0{,}52140$$
$$\log A = 2{,}59140$$
$$A = 390{,}31 = 390 \text{ Gulden, 18 Kr. und 2 Pf.}$$

2) Wenn von einem Capitale von 100,000 Gulden, welches zu 5 Prozenten aufgelegt ist, jährlich 6000 Gulden Renten fließen sollen, auf wie viele Jahre erstreckt sich der Genuß?

Hier ist $R = 0$

$C = 100000$

$A = 6000$

$p = 5$; folglich wird

$$\log A = 3{,}7781513$$

$$\log \{A - C(q-1) = 3{,}0000000$$

$$0{,}7781513$$

$$\log q = 0{,}0211893;$$ folglich

$$n = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893} = 36{,}723,$$ d. i.

36 Jahre, 8 Monate, 20 Tage.

Anhang.

Von den vorzüglichsten Maßen, Gewichten und Münzen.

Erster Abschnitt.

Vom Maße.

I. Vom Längenmaße.

§. 1.

Zur Bestimmung einer Länge bedient man sich verschiedener Maße,
nämlich des Fußes,
der Elle,
der Klafter,
der Ruthe und
der Meile, je nachdem die zu bestimmende Länge größer oder kleiner ist.

§. 2.

Der bayrische Fuß verhält sich zu dem ehemaligen Pariser Fuß, wie 1000 : 1113; wenn man den Pariser Fuß in 144 Linien theilt, so enthält der bayrische Fuß 129, 38 solcher Theile.

„Der bayrische Fuß hat bei + 13° R. 129, 38 Duodezimal-Linien des ehemaligen Pariser Fußes.“

(Regierungs-Blatt, 1809. St. XX.)

§. 3.

Die bayrische Elle hat 2 Fuß, 10 $\frac{1}{4}$ Duodezimal-Zolle, oder 369, 272 Parriser Linien.

Die bayrische Klafter hält 6 Fuß.

Die Ruthe hält 10 Fuß.

§. 4,

Die Meile ist das größte übliche Längenmaß, und zwar in Deutschland die geographische oder deutsche Meile, deren 15 auf einen Grad des Meridians gehen.

Die bayrische Chaussée-Meile enthält 25406 bayrische Fuß; folglich eine Chaussee-Stunde 12703 F., in welcher Entfernung auch die Stundensäulen gesetzt sind.

Zur Vergleichung:

100 bayrische Meilen machen 99, 812 geogr. M.
15, 028 . . . . . 1 Meridian Grad.
1000 geogr. Meilen machen 1003,7 bayrische M.

§. 5.

Man unterscheidet den geometrischen, und den bürgerlichen Fuß. Jener wird nach dem Dezimal-, dieser nach dem Duodezimal-Maß eingetheilt.

Eintheilung des Fußmaßes.

a) im Duodezimalmaß.

Fuß	Zoll	Linien	Scrupl
1^{I}	12^{II}	144^{III}	1728^{IIII}
	1	12	144
		1	12

b) im Dezimalmaß.

Fuß	Zoll	Linien	Scrupl
1	10	100	1000
	1	10	100
		1	10

II. Vom Flächenmaße.

§. 6.

Kleinere Flächen mißt man durch Quadratfuße, d. h. durch Flächen, die in der Länge und Breite einen Fuß haben. Größere durch Tagwerke; ein Tagwerk enthält 40000 bayrische Quadratfuß, ist also eine Fläche, welche 200 Fuß lang und eben so breit ist.

Das größte Flächenmaß ist die Quadratmeile.

Eintheilung des Quadratfußes.

a) Im Duodezimalmaß.

□ Fuß	□ Zoll	□ Linien
1	144	20736
	1	144

b) Im Dezimalmaß.

□ Fuß	□ Zoll	□ Linien
1	100	10000
	1	100

III. Vom Körpermaß.

§. 7.

Hiezu dienen

der Kubikfuß und

die Kubikmeile.

Der Kubikfuß hat 1000 Kubik Dezimalzolle und 1728 Kubik Duodezimalzolle.

§. 8.

Die Klafter als Holzmaß hält 6 Schuhe im Quadrat; — die Scheite sollen $3\frac{1}{2}$ bayrische Schuhe lang seyn.

§. 9.

Zum Körpermaße gehören auch die Getränk- und Getraid-Maße.

§. 10.

Bayrisches Getränkmaß:

Die bayrische Maß enthält 43 bayrische Dezimal-Kubikzolle. Sie wird in halbe Maße oder Seidel, in $\frac{1}{4}$ Maß oder Quarte, und $\frac{1}{8}$ Maße oder Achtel eingetheilt.

Der bayrische Schenkeimer hält 60 M., der Visireimer aber, wie er an die Wirthe abgegeben wird, hält 64 Maß.

§. 11.

Getraidmaß:

Der bayrische Scheffel hat 6 Metzen,
oder 208 bayrische Maß,
oder 8944 bayrische Dezimal Kubikzolle;
oder 15455,232 bayrische Duod. . . . .
oder 11209,598 französische Duod. . . . .

Eintheilung:

Schäffel	Metzen	Viertel $\frac{1}{2}$ Metzen	$\frac{1}{2}$ Viertel $\frac{1}{4}$ Metzen	Dreißiger $\frac{1}{32}$ Metzen
1	6	12	24	192
	1	2	4	32

Zweiter Abschnitt.

Vom Gewichte.

§. 12.

A) Das bayrische Handelsgewicht.

Eintheilung desselben:

Zent.	℔	Unze	Loth	Quintl	Pfenninggewicht	Gran
1	100	1600	3200	12800	51200	768000
	1	16	32	128	512	7680
		1	2	8	32	480
			1	4	16	240
				1	4	60
					1	15

§. 13.

B. Das bayrische oder überhaupt das deutsche Apothekergewicht.

Eintheilung:

℔	Unze ℥	Loth ℥ ß	Drachme oder Quintl ʒ	Scrupl ℈	Gran gr.
1	12	24	96	288	5760
	1	2	8	24	480
		1	4	12	240
			1	3	60
				1	20

Das Handelsgewicht verhält sich zum Apothekergewichte wie 14 : 0.

*) Eine Last ist gleich 2 Tonnen; 1 Tonne aber 2 Zentner.

§. 14.

C. Das bayrische Münzgewicht oder die Köllner Mark.

Eintheilung:

Mrk.	Unz.	Loth	Karat	Quintl	Pfen.	Gran	Aß	Richt Pf.
1	8	16	24	64	256	288	4352	65536
	1	2	3	8	32	36	544	8192
		1	$1\frac{1}{2}$	4	16	18	272	4096
			1	$2\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	12	$181\frac{1}{3}$	$2730\frac{2}{3}$
				1	4	$4\frac{1}{2}$	68	1024

Das französische oder natürliche Maß- und Gewicht-System.

§. 15.

Um in die verschiedenen Maß-Systeme der verschiede-

nen Länder Einheit zu bringen, und um ihrem Grundmaße eine unveränderliche Basis zu geben, leiteten die Franzosen dasselbe aus der Größe des Erdmeridians ab.

A. Längenmaß: Zur Einheit ist der zehnmillionste Theil des Quadraten des Erdmeridians durch Paris unter dem Namen Mètre angenommen.

1 Métre = 3', 11'', 296 altes Parisermaß

1 bayrischer Fuß = 0,291859 Métre.

Um größere Längen zu bestimmen, hat man durch Vorsetzung der griechischen Zahlwörter

den Décamètre = 10 Mètres

den Hectomètre = 100 M.

den Kiliomètre = 1000 M.

Um kleinere Längen zu bestimmen setzt man die latein. Zahlwörter vor, als

Décimétre = $\frac{1}{10}$ Métre

Centimètre = $\frac{1}{100}$ M.

Millimètre = $\frac{1}{1000}$ M.

B. Das allgemeine Flächenmaß heißt Are, und enthält 100 □ Métres.

Daraus wieder Décare, Hectare, Déciare, Centiare u. s. w.

C. Das Frucht- und Körpermaß ist der Litre, oder der Kubus vom Décimétre, d. i. 0,001 cubische Mètres.

Der Kubus eines Mètre ist das neue franz. Holzmaß und heißt Stère.

*) Sehr bequem ist bei diesem Maß-System die Dezimaleintheilung.

D. Gewicht: Das Gewicht einer Quantität destillirten Wassers bei 4° C., welches den Raumsinhalt eines

Kubik-Centimètre einnimmt, ist unter dem Namen, Gramme, die Einheit des Gewichts.

Dritter Abschnitt.

Von den Münzen.

Erklärungen von Münzen überhaupt.

§. 16.

Man nimmt den Werth des Silbers zur Einheit an, und bestimmt darnach den Werth der übrigen Metalle; so sagt man z. B. Silber zu Gold, wie 1 : 15; daher die Redensart: das Gold ist (in Hinsicht des Silbers) gestiegen oder gefallen.

§. 17.

Silber mit Kupfer, und Gold mit Silber und Kupfer legiren, oder beschicken, heißt solche Metalle zusammenschmelzen. Das edle Metall wird legirt, um den Preis etwas zu verringern, und um es härter, dauerhafter und zur Verarbeitung geschickter zu machen. Rothe, weiße und gemischte Legirung.

§. 18.

Feines Gold oder Silber heißt jenes, welches keinen Zusatz von einem andern Metalle enthält. Da nun die Mark Gold in 24 Karat, und die Mark Silber in 16 Loth getheilt wird, so heißt das Gold n karatig, wenn es n Theile fein Gold, und 24 — n Theile fremdartiges Metall enthält; z. B. 18 karatiges Gold hat 18 Theile fein Gold und 6 Theile fremdartiges Metall;
und das Silber heißt n löthig, wenn es n Theile rein Silber und 16 — n Theile fremdartiges Metall enthält.

§. 19.

Man unterscheidet reelle oder gangbare Münzen, d. h. wirklich geprägte Geldstücke; und fingirte oder Rechnungs-Münzen, welche der Maßstab für den Kaufwerth der Dinge, also auch der reellen Münzen sind. (Pfund Sterling, Gulden u. s. w.)

§. 20.

Eine feine Mark heißt eine Mark vom feinen Golde oder Silber; eine rauhe Mark, eine Mark des legirten edlen Metalls. Was die rauhe Mark an Silber oder Gold enthält, heißt Korn; dieses zeigt also den Grad der Legirung an. Z. B. Ein sächsischer Gulden hat Korn 14 Loth 4 Gr., d. h. eine Mark dieses Metalles enthält 14 Loth 4 Gr. Silber, und 1 Loth 14 Gr. Kupfer. Schrott ist das absolute Gewicht jeder einzelnen Münze; dieses zeigt also die Zahl der aus einer Mark geprägten Münzen an. Z. B. Beym sächs. Gulden ist das Schrot 1 Loth.

§. 21.

Das Gesetz, wodurch Schrot, Korn und der Kaufwerth einer Münze bestimmt wird, heißt der Münzfuß.

Die Münzfüße im Silber in Deutschland sind

a) der Graumannsche oder 21 Guldenfuß in Preussen; nach ihm wird die Mark fein Silber auf 14 Reichsthaler oder 21 Gulden ausgemünzt.

b) Der Conventions- oder 20 Guldenfuß; die feine Mark zu 13 $\frac{1}{3}$ Thaler, oder 20 fl. In einigen Staaten (auch bei uns in Bayern) cursiren aber die nach diesem Fuße geprägten Geldstücke nicht nach eben diesem Fuße, sondern nach dem

c) 24 Guldenfuß, nämlich die feine Mark Silber zu 16 Reichsthaler, 24 Gulden oder 10 Conventionsthaler.

Daher ist der 24 Guldenfuß kein besonderer Münzfuß,

sondern nur eine Erhöhung des Werths verschiedener nach dem 20 Guldenfuße geprägter Münzen.

Anmerk. In jenen Ländern, in welchen die Kronenthaler im Kurse zu 2 fl. 42 kr. die dominirende grobe Sorte geworden sind, hat man auf diese Weise noch einen eigenen Fuß, nämlich den Kronenthalerfuß oder den $24\frac{55}{100}$ Fuß. Man müßte daher entweder den Conventionsfuß nach dem Kronenthalerfuße tarisiren, d. h. die Conventionsthaler, 24 und 12 Kreuzerstücke auf 2 fl. 27 Kr., $24\frac{1}{2}$ und $12\frac{1}{4}$ Kr. setzen; oder den Kronenthaler auf den Conventionsfuß herabsetzen; (wie es in Oestreich bereits geschehen ist;) allein der Kronenthalerfuß hat so tiefe Wurzeln geschlagen, daß an eine Zurückführung des 24 fl. Fußes in den süddeutschen Staaten kaum gedacht werden kann.

§. 22.

Bayerische Geldrechnung:

Gulden,	Groschen,	Kreutzer,	Pfennige,	Heller
1	10	60	240	480
	1	3	12	24
		1	4	8
			1	2

§. 23.

Werth der bekanntesten Münzen im 24 Guldenfuße.

		fl.	kr.
In Bayern	1 Kronenthaler	2	42
	(halbe und viertel Kronen		
	1 Conventions- oder Bayerthaler	2	24
	1 Kopfstück	—	24
	½ Kopfstück	—	12
	(Sechser, Groschen u. s. w.)		
	1 Gulden (fingirt)	1	—
	1 Reichsthaler (fingirt)	1	30
	1 Dukate	5	30

		fl.	kr.
In Oesterreich	1 Kaisergulden	1	12
	(Stücke zu 2 und 1 Kaisergulden;) 20 Kr. Stücke; Kupferkreuzer 60 auf einen Kaisergulden. Die übrige Kupfermünze herabgesetzt von ihrem Nennwerthe; Papiergeld. 1 Gulden Papier = 24 Kr. nach dem Conv. Fuße.		
In Norddeutschland	1 Thaler sächsisch (24 Groschen)	1	48
	1 Preußischer Thaler	1	$42\frac{6}{7}$
In Frankreich	1 Franc.		
	1 Franc = 100 Centimes	—	$27\frac{1}{2}$
In England	1 Pfund Sterling (fingirt)	11	6
	1 Pfund St. = 20 Schillinge.		
In Rußland	1 Rubel (Silber)	1	51
	1 Rubel = 100 Kopeken (Papierrubel)		
In Spanien	1 Real	—	$7\frac{1}{2}$
	1 Piaster	2	28
"	1 Schweizerfranc	—	$41\frac{1}{2}$

Verhältniß des bayerischen zum Kaisergelde ist wie 24 : 20 = 6 : 5;
also 6 baier. Gulden = 5 Kaisergulden.

§. 24.

Verwandlung der sächsischen Geldrechnung in die bayerische und umgekehrt.

Sächsisch.	Bayerisch.			
	fl.	kr.	pf.	hl.
1 Pf.	—	—	1	1
2 Pf.	—	—	3	—
3 Pf.	—	1	—	1
4 Pf.	—	1	2	—
1 Gr.	—	4	2	—
2 Gr.	—	9	—	—
1 Thlr.	1	48	—	—

Bayerisch.	Sächsisch.		
	Thlr.	Gr.	Pf.
1 Kr.	—	—	$2\frac{2}{3}$
2 Kr.	—	—	$5\frac{1}{3}$
3 Kr.	—	—	8
12 Kr.	—	2	8
1 fl.	—	13	4
1 fl. 30 kr.	—	20	—

Sammlung

verschiedener Aufgaben

zur

Lehre von den Gleichungen.

A. Aufgaben mit einer Unbekannten.

§. 1.

I. Eine Verlassenschaft soll unter mehrere Kinder so getheilt werden, daß jedes Kind so oftmal 3000 Gulden nimmt, als das wievielte in der Reihe es ist, und noch ausserdem den fünften Theil des Restes. Auf diese Art bekommen alle Kinder gleich viel. Wie viele Kinder waren da, und wie groß war die Verlassenschaft?

Die ganze Verlassenschaft sey x Gulden; folglich bekömmt das erste Kind $3000 + \frac{x - 3000}{5}$ d. i. $\frac{x + 12000}{5}$; und $x - \frac{x + 12000}{5}$ bleiben noch übrig. Hievon nimmt das zweite Kind zuerst 6000 Gulden und dann den fünften Theil des Restes; dieser Rest ist $x - \frac{x + 12000}{5} - 6000 = \frac{4x - 42000}{5}$; das zweite Kind bekömmt also $6000 + \frac{4x - 42000}{25}$ oder $\frac{4x + 108000}{25}$; da nun der Antheil des zweiten Kindes gleich dem des ersten ist, so haben wir

$$\frac{x + 12000}{5} = \frac{4x + 108000}{25},$$

woraus $x = 48000$; folglich waren 4 Kinder, und jedes bekam 12000 Gulden

§. 2.

II. Ein Arbeiter erhält für jeden Tag, an welchem er arbeitet a (Gulden oder Kreuzer) Lohn; für jeden Tag, an welchem er aber nicht arbeitet, muß er b (Gulden oder Kr.) bezahlen. Nach Verlauf von m Tagen wird mit ihm abgerechnet, und da zeigt sich, daß, wenn er n Tage gearbeitet hatte, er nichts bekömmt und nichts schuldig ist.

Weil $m - n$ die Tage sind, an denen er nicht arbeitete, so muß

$$an = (m - n)\, b \text{ seyn.}$$

Daraus folgt

$$1)\ a = \frac{(m-n)\, b}{n}$$

$$2)\ b = \frac{a\, n}{m-n}$$

$$3)\ n = \frac{m\, b}{a+b}$$

$$4)\ m = \frac{(a+b)\, n}{b}.$$

Z. B. Der Arbeiter erhält für jeden Arbeitstag 24 Kr., für jeden Tag, an dem er nicht arbeitet, muß er 6 Kr. zahlen; nach 30 Tagen bekömmt er nichts, und ist nichts schuldig; wie viele Tage arbeitete er?

Da $a = 24.$

$b = 6$

$m = 30$ ist, so ist $n = \frac{180}{30} = 6.$

§. 3.

III. Jemand verspricht eine Summe Geldes a zu zahlen, und gewisse Waaren zu liefern im Geldwerthe b für ein Jahr, als Pachtgeld, Dienstlohn u. s. w. Nach Verlauf von $\frac{m}{n}$ Theilen des Jahrs wird mit beiderseitiger Einstimmung die Uebereinkunft aufgehoben. Da aber alle für das

ganze Jahr fälligen Waaren bereits abgeliefert worden sind, so wird der Zahlende nicht das für die $\frac{m}{n}$ Theile des Jahrs fällige Pachtgeld u. s. w. ganz bezahlen, sondern, zur Vergütung der zu viel gelieferten Waaren, etwas weniger, nämlich d.

Bildung der Gleichung.

Für das ganze Jahr müßte gezahlt werden $a + b$; für $\frac{m}{n}$ Theile des Jahrs ist daher $\frac{m}{n}(a + b)$ zu zahlen; der Billigkeit gemäß aber muß das, was wirklich bezahlt wird $(b + d)$ dem gleich seyn, was mit Recht gefordert werden kann, nämlich dem $\frac{m}{n}(a + b)$,

also ist $\frac{m}{n}(a + b) = b + d$.

Daraus wird 1) $b = \frac{ma - nd}{n - m}$

2) $a = \frac{n}{m}(b + d) - b$

3) $d = \frac{m}{n}(a + b) - b$

Beispiele: 1) Ein Müller verspricht 3500 Gulden jährlichen Pachtzins und eine gewisse Quantität Mehls, angeschlagen zu 270 fl. Das Mehl liefert er gleich bei der Uebernahme der Mühle ab. Nach 15 Wochen zieht er wieder ab; wie viel muß er noch Pachtzins zahlen?

Da $d = \frac{m}{n}(a + b) - b$, so

wird $d = 817\frac{1}{2}$ Gulden.

Der Nachlaß an dem völligen Pachtgelde wird seyn $a \cdot \frac{m}{n} - d$ oder 182 fl.

2) Es dingt Jemand einen Diener, und verspricht ihm jährlich ein Kleid und 150 Gulden Lohn. Nach 8 Monaten

entläßt er ihn, und gibt ihm nebst dem Kleide noch 86 Gulden. Wie hoch ist das Kleid in Anschlag gebracht?

Da $b = \frac{ma - nd}{n - m}$ ist, so wird

$b = 42$ Gulden.

*) Das Pachtgeld sei a; davon zahle man b voraus; nach $\frac{m}{n}$ Jahr wird der Vertrag aufgehoben, und dann darf noch d bezahlt werden. Hier ist die Gleichung

$$\frac{m}{n}(a - b) = b + d.$$

Beispiel. Ein Kaufmann verspricht seinem Diener jährlich 265 G.; gibt ihm aber sogleich x G. zu Kleidern. Nach 9 Monaten wird er verabschiedet, und bekömmt noch 78 G.

Hier war

$$x = 69.$$

§. 4.

IV. Vier Menschen verzehren in 10 Monaten ein Kapital von 1100 Gulden sammt den Interessen; drei Menschen verzehren auf eben diese Art ein Kapital von 1200 Gulden in 15 Monaten. Wie lange werden bei eben derselben Lebensart 6 Menschen mit einem Kapitale von 1650 Gulden auskommen?

Wenn 100 Gulden in 1 Monat x Gulden Interesse tragen, so tragen 1100 Gulden in 10 Monaten 110 x. Die 4 Menschen haben also in 10 Monaten 1100 + 110 x Gulden verzehrt, folglich kömmt auf einen derselben monatlich $\frac{1100 + 110\,x}{40}$; im zweiten Falle verzehrt jeder monatlich $\frac{1200 + 180\,x}{45}$; und da sie auf gleiche Weise gelebt haben sollen, so ist

$$\frac{1100 + 110\,x}{40} = \frac{1200 + 180\,x}{45}$$

und $x = \frac{2}{3}$, woraus wir finden, daß jeder Mensch monatlich $29\frac{1}{3}$ Gulden verzehrte.

Sei nun y die Anzahl Monate, während welcher 6 Menschen mit 1650 G. auskommen sollen; das Kapital trägt monatlich $\frac{1650}{100} \times \frac{2}{3} = 11$ G. Zins; folglich in y Monaten 11 y Gulden, und das Kapital sammt Interesse ist demnach $1650 + 11\,y$ Gulden.

Jeder Mensch verzehrt monatlich $29\frac{1}{3}$ G., also brauchen 6 Menschen in y Monaten 176 y Gulden, und da das Kapital sammt Interesse verzehrt werden soll, so haben wir

$$176\,y = 1650 + 11\,y$$

$$\text{und } y = 10.$$

§. 5.

V. Ein Wasserbecken wird durch eine Röhre allein in a Stunden gefüllt; durch eine andere in b Stunden; in welcher Zeit wird es vollgefüllt seyn, wenn beide Röhren zugleich in dasselbe fließen?

Die gesuchte Zeit sei x, und der ganze Inhalt des Beckens werde als Einheit betrachtet, z. B. als ein Eimer, oder dgl.

Da die erste Röhre in a Stunden das ganze Becken füllt, so füllt sie in einer Stunde $\frac{1}{a}$ vom ganzen Becken, und in x Stunden füllt sie $\frac{x}{a}$ vom Becken, eben so füllt die zweite $\frac{x}{b}$ in x Stunden. Der Raum, den beide zusammen in x Stunden anfüllen, muß gleich seyn dem Inhalt des ganzen Beckens, d. i. der Einheit;

wir haben also

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \text{ woraus}$$

$$x = \frac{ab}{a+b} \text{ wird;}$$

d. h. man dividirt das Produkt der Zeiten, welche die Röhren brauchen, wenn jede allein fließt durch die Summe dieser Zeiten.

Beisp. 1) Wenn $a = 5\frac{3}{4}$ Stunden, und

$b = 4\frac{2}{3}$ St. ist, so

ist $x = 2\frac{72}{125}$ Stunden.

2) Zwei Abtheilungen Arbeiter werden zu einer Arbeit angestellt, welche die erste Abtheilung in 19 und die zweite in 27 Tagen verrichten kann; wie viele Tage werden beide zusammen dazu brauchen?

$a = 19$

$b = 27$

$x = 11\frac{7}{46}$ Tage.

*) Sind 3 Kräfte vorhanden, die durch ihr Zusammenwirken die Wirkung hervorbringen, so ist

$$x = \frac{abc}{ab + ac + bc}$$

Beisp. Eine bestimmte Quantität von Brettern liefert die Schneidemühle A in 8, die B in 10, und die C in 20 Tagen. In wie viel Tagen werden die drei Mühlen zusammen die nämliche Quantität abliefern können?

$a = 8$, $b = 10$, $c = 20$ | also $x = 3\frac{7}{11}$ Tage.

§. 6.

VI. Der Dom zu Regensburg wurde im Jahre 1275, und die steinerne Brücke daselbst im Jahre 1135 zu bauen angefangen. Wann war die Brücke gerade zweimal so alt, als der Dom?

Vor 414 Jahren.

Im Jahre 1829 ist der Dom 554 Jahre, und die Brücke 694 J. alt; folglich

$$554 - x = \frac{694 - x}{2}, \text{ woraus}$$

$$x = 414.$$

§. 7.

VII. In einer Börse finden sich 100 Geldstücke, theils Kronenthaler, theils Bayerthaler, welche zusammen 246 Gulden betragen. Wie viel sind es von jeder Sorte?

x Kronth. und 100 — x Bayerth.

$$\frac{27}{10} \cdot x + \frac{12}{5} (100 - x) = 246.$$

$$x = 20 \text{ Kronth.}$$

$$100 - x = 80 \text{ Bayerth.}$$

§. 8.

VIII. Jemand hat von einer gewissen Waare (z. B. von Wein oder dgl.) zwei Sorten; der Preis der Maßeinheit der bessern Sorte sei a, der geringern b; er will daraus eine Mittelsorte mischen, von welcher die Maßeinheit c werth seyn soll; er wird also von der bessern Sorte x Maße nehmen, und von der geringern 1 — x Maße (das ganze Gemisch = 1 gesetzt).

Man hat die Gleichung

$$a\,x + (1 - x)\,b = c \times a.$$

Daraus wird

$$1)\ x = \frac{c - b}{a - b}; \text{ und } 1 - x = \frac{a - c}{a - b};$$

$$2)\ a = \frac{c - (1 - x)\,b}{x};$$

$$3)\ b = \frac{c - a\,x}{1 - x}, \text{ und}$$

$$4)\ c = a\,x + (1 - x)\,b.$$

Beisp. Aus einem Weine, wovon die Maaß 30 Kr., und aus einem anderen, wovon die Maaß 20 Kr. kostet, einen Eimer so zu mischen, daß die Maaß 24 Kr. werth sei, muß man vom bessern Weine 24 M., folglich vom schlechtern 60 — 24 M. d. i. 36 M. nehmen; denn

Da das ganze Gemisch hier = 60 ist, so wird die obige Gleichung

$$a x + (60 - x) b = c \,.\, 60$$

folglich $x = \frac{60 c - 60 b}{a - b}$, und

$$x = 24.$$

2) Jemand will Wein, wovon der Eimer 60 G. kostet, und Wasser in einem Fasse, welches einen Eimer hält, füllen, so daß daraus ein gemischter Wein entstehen soll, wovon der Eimer 12 G. werth ist.

Da Wasser nichts kostet, so ist $b = o$, also

$$a x = c$$

$$x = \frac{c}{a} \text{ und}$$

$$x = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \text{ d. h.}$$

er muß 45 M. Wein und 15 M. Wasser mischen.

§. 9.

IX. Eine gewisse Summe (S) soll unter eine gewisse Anzahl Menschen (N) vertheilt werden. Wollte man Jedem der Theilenden a Stücke reichen, so wären m Stücke zu viel; gäbe man aber jedem Theiler b Stücke, so wären n zu wenig. Wie viel sind es Theiler, und wie groß ist die zu vertheilende Summe?

Da N die Theiler bedeutet, so ist die Summe einmal $a N + m$ und das anderemal $b N - n$;

folglich daraus die Gleichung

$$a N + m = b N - m; \text{ und dann ist}$$

$$N = \frac{m + n}{b - a}, \text{ und, wenn N bekannt ist,}$$

$$S = a N + m \text{ oder}$$

$$= b N - m.$$

Auch hier kann man die eine oder die andere der vorkommenden Größen als unbekannt annehmen, und durch die übrigen bestimmen.

Beisp. 1) Es soll eine Summe Gelds unter eine An-

zahl Arme vertheilt werden. Wollte man jeder Person 4 Gulden reichen, so wären 32 G. zu viel; gäbe man aber jeder Person 4 G. 30 Kr., so wären 51 G. 30 Kr. zu wenig.

Wie viel sind es Arme?

Wie groß ist die zu vertheilende Geldsumme?

$$a = 4$$
$$b = 4\tfrac{1}{2}$$
$$m = 32$$
$$n = 51\tfrac{1}{2}, \text{ folglich}$$
$$N = 167 \text{ und}$$
$$S = 700.$$

2) Ein quadratischer Platz soll mit Bäumen bepflanzt werden; wenn man auf jede Seite des Quadrats eine bestimmte Anzahl setzte, blieben 60 übrig; setzte man aber auf jede Seite um ein Stück mehr, so fehlten 41.

Wie viel Bäume (x) setzte man zuerst auf eine Seite?

$$x^2 + 60 = x^2 + 2x + 1 - 41$$
$$x = 50.$$

§. 10.

X. Ein Vater wurde einst über das Alter seines Sohnes gefragt. Er antwortete: Vor 5 Jahren war ich dreimal so alt, als mein Sohn; und in 7 Jahren werde ich zweimal so alt seyn, als er. Wie alt ist jetzt Vater und Sohn?

Vor 5 J. zählte der Sohn x, der Vater 3 x J.; gegegenwärtig jener x + 5, dieser 3 x + 5 J.; folglich nach 7 Jahren

$$\frac{3x + 5 + 7}{2} = x + 5 + 7, \text{ woraus}$$
$$x = 12; \text{ d. h.}$$

Vor 5 J. war der Sohn 12, der Vater 36 J. alt, u. s. w.

§ 11.

XI. A lieh 4000 G. zu 4 p. C aus; B aber, nach

3 Jahren, 5000 G. zu 5 p. C. Wie lange wird es hergehen, bis beide gleich viel Zins bezogen haben?

Es daure x Jahre.

Nach x + 3 Jahren hat der A 160 x + 480 Zins; nach x Jahren hat der B 250 x Zins;

$$\text{also } 160\,x + 480 = 250\,x$$

$$x = 5\tfrac{3}{4} \text{ J.}$$

Und der Zins beider Kapitale ist dann

$1333\frac{1}{3}$ Gulden.

§. 12.

XII. In einer Festung sind a Scheffel Mehl, und täglich werden b Schäffel davon verzehrt. Nach m Tagen kömmt Verstärkung in die Festung, so daß jetzt p mal mehr Soldaten in derselben sind, als vorher, und mit dem Mehle soll der Befehlshaber noch ~~12~~ n Tage ausreichen. Wie viele Schäffel muß er täglich mehr oder weniger verabfolgen lassen?

Gesetzt er reichte während der n Tage täglich y Schäffel; also in allen ny Schäffel; die anfängliche Besatzung verzehrte bereits mb Schäffel, so daß a — mb als Rest blieben, die dann in n Tagen verzehrt seyn sollen; also

$$a - mb = n.\,y$$

$$y = \frac{a - mb}{n} \text{ werden täglich gereicht.}$$

Um auch zu bestimmen, wie viel Schäffel mehr oder weniger (x) als vorher, gegeben werden müssen, dient folgende Betrachtung: Die p mal größere Mannschaft verzehrt täglich pb Scheffel; also ist das Mehr oder Weniger

$$x = y - pb; \text{ oder}$$

$$x = \frac{a - b.\,m}{n} - b\,p.$$

$$\frac{a - m\,b}{n} > b\,p \text{ gibt ein Mehr, und}$$

$$\frac{a - m\,b}{n} < b\,p \text{ gibt ein Weniger.}$$

Beispiel. $a = 180;$
$b = 14;$
$m = 4;$
$p = 2;$
$n = 4;$

Es wird $x = 3$, mehr.

§. 13.

XIII. Jemand soll nach 3 Jahren 460 Gulden zahlen; zahlt er aber jetzt gleich, wie viel muß er geben, daß das gezahlte Geld mit den dreijährigen Zinsen zu 5 p. C. so viel als obige 460 G. ausmacht?

$$x \text{ Guld.} + \text{dreijähr. Zinsen} = 460 \text{ G.}$$

Die einjährigen Zinsen von x sind $\frac{1}{20}x$,

also $x + \frac{3}{20}x = 460$

$$x = 400.$$

§. 14.

XIV. Eine Mischung besteht aus acht Theilen Salpeter und einem Theile Schwefel. Wie viel Salpeter muß noch hinzugethan werden, damit auf 9 ℔ Salpeter nur 8 Loth Schwefel in der Mischung sind?

In der Mischung sind jetzt auf 1 ℔ Schwefel 8 ℔ Salpeter, kommen noch x ℔ Salpeter hinzu, so erhält die ganze Mischung 8 + x ℔ Salpeter, und nach wie vor 1 ℔ Schwefel; da nun auf 9 ℔ Salpeter nur 8 Loth oder $\frac{1}{4}$ ℔ Schwefel kommen soll, so wird $9 \times 4 = 36$ mal mehr Salpeter in der Mischung seyn, als Schwefel; das gibt

$$8 + x = 36 \text{ und}$$

$$x = 28.$$

§. 15.

XV. Zwei Körper bewegen sich in einerlei Richtung aber mit ungleichen Geschwindigkeiten von einem und

demselben Platze zu verschiedenen Zeiten ausgehend, wann wird der zweite den ersten einholen?

Die Geschwindigkeit des ersten Körpers sei a, des zweiten b (also $b > a$, sonst ist kein Einholen möglich.)

Der erste Körper ist um m Tage früher, als der zweite abgegangen, und werde in n Tagen eingeholt.

Es ist $bn = (m + n)\, a$.

Denn sobald der zweite Körper den ersten eingeholt hat, so hat jeder die nämliche Strecke Wegs vollendet; da der zweite n Tage lang mit der Geschwindigkeit b läuft, so ist sein Weg bn; eben so ist der Weg des ersten Körpers ma (was er vor dem zweiten voraus hat) + na; also

$$b\,n = (m + n)\, a.$$

Hieraus entspringen nun verschiedene Aufgaben, je nachdem man die eine oder die andere der Größen a, b, m und n als unbekannt betrachtet.

1) Ist a unbekannt, so wird

$$a = \frac{bn}{m + n}$$

2) Ist b unbekannt, so wird

$$b = \frac{(m + n)\, a}{n}.$$

3) Ist m unbekannt, so wird

$$m = \frac{n(b - a)}{a}$$

4) Ist n unbekannt, so wird

$$n = \frac{m\,a}{b - a}.$$

Beispiele.

1) Ein Bote wird aus einer Stadt abgeschickt, und macht täglich 4 Meilen; nach 3 Tagen wird ihm ein zweiter nachgeschickt, der täglich 6 Meilen macht. In wie viel Tagen holt er den ersten ein?

Hier ist $a = 4$

$b = 6$

$m = 3$; woraus

$n = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$; also in 6 Tagen.

2) Ein Bote wird abgeschickt, und macht 7 Meilen in 5 Stunden; 8 Stunden später wird ihm ein zweiter mit dem Befehle nachgeschickt, den ersten nach 42 Stunden einzuholen. Mit welcher Geschwindigkeit muß er reisen?

Hier ist $a = \frac{7}{5}$

$m = 8$

$n = 42$;

also $b = \frac{5}{3}$ ist die Geschwindigkeit; da aber die Geschwindigkeit gleich ist dem Raume dividirt durch die Zeit, so heißt $\frac{5}{3}$ in diesem Falle, der zweite Bote muß 5 Meilen in 3 Stunden machen.

§. 16.

XVI. Zwei Städte liegen in einer Entfernung von 100 Meilen; aus beiden werden zu gleicher Zeit zwei Eilboten abgeschickt; der Boote A würde den ganzen Weg in 12, der Bote B in 13 Tagen zurücklegen. In wie viel Tagen begegnen sie sich?

A macht täglich $\frac{100}{12}$ und B $\frac{100}{13}$ Meilen; folglich A in x Tagen $\frac{100 \cdot x}{12}$ und B $\frac{100 \cdot x}{13}$ Meilen; demnach

$$\frac{100 \cdot x}{12} + \frac{100 \cdot x}{13} = 100$$

$$x = 6\tfrac{6}{25} \text{ Tage.}$$

§. 17.

XVII. Aus M geht der Bote A ab, und macht täglich 4 Meilen; einen Tag später geht B aus dem Orte N, welches 18 Meilen von M liegt, ab, und macht täglich 6 Meilen; wann holt er den A ein?

Der Weg des B sei x; da B 1 Meile macht, während A $\frac{2}{3}$ Meilen macht, so ist

$$x = \frac{2}{3}x + 18 + 4$$
$$x = 66 \text{ Meilen, oder}$$

in 11 Tagen.

§. 18.

XVIII. Zwei Körper bewegen sich mit ungleichen Geschwindigkeiten in der Richtung A. B. C. der Eine befindet sich in A, der Andere in B, man kennt ihre Geschwindigkeiten, und den Abstand der Orte A und B voneinander; in welchem Punkte ihres Weges werden sie zusammentreffen?

A——————B——————R

Nennen wir den Punkt des Zusammentreffers R so wird der Körper A den Raum A R, der Körper B den Raum B R zurücklegen müssen. Da diese beiden Räume gesucht werden, so wollen wir A R = x und B R = y setzen. Die Aufgabe kann aber mit Einer Unbekannten (x) gelöst werden, indem man eigentlich nur den Raum x zu wissen nöthig hat, den der Körper A zurücklegen muß, um B einzuholen, indem dann sogleich $x - c = y$ der Raum für den zweiten Körper ausdrückt, wenn die Entfernung $= c$ gesetzt wird; weil $AR - AB = BR$

d. i. $x - c = y$.

Sind bei Bewegungen die Zeiten gleich, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, wie die Räume.

In unsrer Aufgabe sind die Geschwindigkeiten a und b, die Räume sind x und y; da nun die zwei Körper zugleich in R eintreffen sollen, so sind die Zeiten gleich, also verhält sich

$$a : b = x : y$$

woraus $a y = b x$

und $\frac{a y}{b} = x.$

Wird dieser Werth von x in in der obigen Gleichung

$x - c = y$ gesetzt, so

wird $y = \frac{b\,c}{a-b}$.

Und da $x = \frac{ay}{b}$ war, so wird

$$x = \frac{a\,c}{a-b};$$

d. h. die Räume, welche beide Körper zurücklegen müssen, sind gleich dem Abstande der Orte A und B, multiplizirt mit der Geschwindigkeit des betreffenden Körpers, dividirt durch die Differenz der Geschwindigkeiten.

Beispiele.

1) Der Stundenzeiger einer Uhr steht auf 17 Minuten und der Minutenzeiger auf 24 Minuten, d. h. es ist 3 Uhr 24 Minuten; wann werden sich die Zeiger decken?

$$a = 12$$
$$b = 1$$
$$c = 53$$

$x = \frac{a\,c}{a-b} = \frac{12 \cdot 53}{11} = 57\frac{9}{11}$ d. h. nach $57\frac{9}{11}$ Minuten, oder um 4 Uhr $21\frac{9}{11}$ Minuten.

Auch durch folgende Betrachtung läßt sich diese Aufgabe lösen:

Bis der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholt, muß er den anfänglichen Abstand von 53 Minuten durchlaufen, und überdieß noch jenen Raum, um den der Stundenzeiger indessen während der Einholenszeit weiter vorgerückt ist, d. i. den Raum $\frac{x}{12}$, aus

$$12 : 1 = x : \frac{x}{12}.$$

Also wird die Gleichung $\frac{x}{12} + 53 = x$

woraus $x = 57\frac{9}{11}$ Meilen.

2) Um welche Zeit wird der Minutenzeiger den Stundenzeiger zwischen 7 und 8 Uhr decken?

Hier ist $c = 35$
$a = 12$
$b = 1$

also $x = \frac{a\,c}{a - b} = 38^{I};\ 11^{II}$.

3) Zwei Regimenter, welche 58 Meilen von einander entfernt sind, verwechseln ihre Standquartiere. Das erste Regiment macht täglich $3\frac{1}{3}$ Meile, und hält am vierten Tage Rasttag; das zweite macht täglich $3\frac{1}{2}$ Meile, und hält am dritten Tage Rasttag. Wann treffen beide Regimenter zusammen?

Hier ist b negativ.

Der Weg des ersten oder $x = \frac{a\,c}{a + b}$.

Es ist $a = \frac{10}{4}$
$b = \frac{7}{3}$
$c = 58$, also
$x = 30$ Meilen, wozu das erste Regiment 12 Tage braucht; folglich $y = 28$ Meilen.

B) Aufgaben mit zwei Unbekannten.

§. 19.

I. Eine Gesellschaft verzehrte eine gewisse Summe, und zwar jede Person gleichviel. Wären 5 Personen mehr gewesen, und hätte jede einen Gulden weniger bezahlt, so hätte die Gesellschaft um 7 G. mehr bezahlen müssen, als sie wirklich bezahlte; wären 3 Personen weniger gewesen, und hätte jede 3 G. mehr bezahlt, so hätte die Gesellschaft um 3 G. mehr bezahlen müssen, als sie wirklich bezahlte. Aus wie viel Personen (x) bestand die Gesellschaft, und wie viel (y) bezahlte jeder?

Die Gesellschaft zahlte $x\,y$ G., folglich

ist $(x + 5)(y - 1) = xy + 7$
und $(x - 3)(y + 3) = xy + 3$,
durch Vollziehung der Multiplikation entsteht

$x = 5y - 12$ und
$3x = 3y + 12$;
woraus $y = 4$
und $x = 8$ folgt.

§. 20.

II.) Zwei Röhren füllen ein Gefäß von a Eimern, indem die erste b, und die zweite c Stunden fließt; zu einer andern Zeit füllten sie ein Gefäß von d Eimern, indem die erste f und die zweite g Stunden floß. Wie lange müssen beide gleichzeitig fließen, damit sie ein Gefäß von h Eimern füllen? Antwort: X Stunden. Die Röhre A gebe in einer Stunde x, also in b Stunden bx Eimer; die Röhre B in einer Stunde y und in c Stunden cy Eimer; daher hat man

$$bx + cy = a \text{ und}$$
$$fx + gy = d,$$
$$\text{woraus } x = \frac{cd - ag}{cf - bg} \text{ und}$$
$$y = \frac{af - db}{cf - bg}. \text{ d. h.}$$

man kennt die Wassermengen, die jede Röhre in einer Stunde gibt. Beide Röhren geben nun $x + y$ in einer Stunde, folglich in X Stunden den Inhalt von h Eimern; wegen

$$1 : x + y = X : h$$
$$X = \frac{h}{x + y}.$$

Beispiel. Setzt man $a = 22.\ c = 4$;
$b = 6;\ d = 31$;
$f = 0;\ g = 7$;
$h = 100$;

so wird $x = 5$
und $y = -2$, d. h. die Röhre
A schüttet jede Stunde 5 Eimer in's Gefäß, aus welchem durch die andere B stündlich 2 Eimer abfließen.

§. 21.

III. Archimed's Kronen-Probe für König Hiero.

Der König Hiero ließ sich einstens eine goldene Krone verfertigen, wozu er dem Künstler 18 ℔. Gold gab. Als dieser die vollendete Krone dem Könige überbracht hatte, so wollte Hiero erfahren, ob der Künstler betrügerischer Weise dem Golde Silber beigemischt habe, und wie viel. Diese Prüfung der Krone übertrug er nun dem Archimed, welcher die Aufgabe, (wenn anders die ganze Erzählung wahr ist) durch Anwendung des physikalischen Gesetzes auflöste, daß jeder feste Körper durch Eintauchen in Wasser von seinem Gewichte gerade so viel verliert, als das Wasser unter seinem Raums-Inhalte wiegt, welches er aus der Stelle treibt.

Um die Aufgabe zu lösen, müssen ein paar Versuche vorausgeschickt werden; nämlich man muß durch Einsenken in Wasser ausmitteln, wie viel ein gewißes Stück Gold und wie viel ein gewisses Stück Silber dadurch an Gewicht verliere; eben so, wie viel die zu prüfende Masse in Wasser verliere. Dann läßt sich die Aufgabe allgemein fassen, nämlich:

„Es sey bekannt: das Gewicht einer aus 2 Metallen „zusammengeschmolzenen Masse (m), und der Verlust derselben in Wasser (d); ferner sey bekannt der Gewichtsverlust (α), welchen ein beliebiges Stück a des ersten „Metalls, und der Gewichtsverlust (β), welchen ein beliebiges Stück b des zweiten Metalls im Wasser erleidet; „man soll daraus die Gewichte x und y der in der Mischung enthaltenen Metalle finden.“

Offenbar ist $x + y = m$ (1) Ferner, wenn das

Stück Metall a im Wasser α verliert, so wird x verlieren $\frac{\alpha x}{a}$; wegen $a : \alpha = x : X$ also der Verlust von x, d. i. $X = \frac{\alpha x}{a}$; eben so wird, wenn das Stück Metall b im Wasser β verliert, der Verlust von y, d. i. $Y = \frac{\beta y}{b}$ seyn, wegen $b : \beta = y : Y$; also

$$d = X + Y = \frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b}. \quad (2)$$

Aus diesen Gleichungen (1) und (2) bestimme man nun die unbekannten Größen x und y also:

aus (1) folgt $x = m - y$;

substituirt man diesen Werth von x in der Gleichung (2), so erhält man

$$d = \frac{\alpha}{a}(m - y) + \frac{\beta y}{b}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\alpha m - \alpha y}{a} = d - \frac{\beta y}{b}$$

$$\frac{\beta y}{b} - \frac{\alpha y}{a} = d - \frac{\alpha m}{a}$$

$$\left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) y = \frac{a d - \alpha m}{a}, \text{ folglich}$$

$$y = \frac{a d - \alpha m}{a} : \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right)$$

$$= \frac{a d - \alpha m}{a} + \frac{a b}{a\beta - b\alpha}$$

$$= \frac{a d - \alpha m}{a\beta - b\alpha} . b$$

Da aus (1)

$$x = m - y \text{ oder}$$

$$= m - \frac{a d - \alpha m}{a\beta - b\alpha} . b \text{ ist, so folgt}$$

$$x = \frac{\beta m - b d}{a \beta - b \alpha} . a = \frac{b d - \beta m}{b \alpha - a \beta} . a.$$

Anwendung auf die obige Kronen-Probe:

Gesetzt, die Krone verlor durch Einsenken in Wasser $\frac{5}{4}$ ℔; 18 ℔. reinen Goldes verlieren 1 ℔., 18 ℔. reinen Silbers aber $\frac{7}{4}$ ℔.;

so ist $m = a = b = 18.$

$\alpha = 1.$

$\beta = \frac{7}{4}$, folglich

$$x = \frac{18 . \frac{5}{4} - \frac{7}{4} . 18}{1 . 18 - 18 . \frac{7}{4}} 18 = 12.$$

und $$y = \frac{18 . \frac{5}{4} - 1 . 18}{\frac{7}{4} . 18 - 18 . 1} . 18 = 6.$$

d. h. die Krone bestand aus 12 ℔. Gold und 6 ℔. Silber.

Setzt man $a = b = 1$, so wird

$$x = \frac{d - \beta m}{\alpha - \beta}$$ und

$$y = \frac{d - \alpha m}{\beta - \alpha}$$; folglich im obigen Beispiele

ebenfalls $$x = \frac{5/4 - 7/72 . 18}{1/18 - 7/12} = 12$$

$$y = \frac{5/4 - 1/18 . 18}{7/72 - 1/18} = 6.$$

Ein anderes Beispiel:

Eine Mischung aus Zinn und Blei von 120 ℔. verliert im Wasser 14 ℔.; nun verlieren 37 ℔. reines Zinn im Wasser 5 ℔; 23 ℔. Blei aber 2 ℔.; wie viel Zinn und Blei ist in der Mischung?

Hier ist $m = 120$ ℔.

$d = 14$ —

$a = 37$ —

$b = 23.$ —

$\alpha = 5$ ℔.

$\beta = 2$ ℔.;

folglich $x = 74$ ℔. Zinn, und
$y = 46$ ℔. Blei.

Anmerk. Die Voraussetzung, daß der Raums-Inhalt der Mischung gleich sey der Summe der Raums-Inhalte der mit einander gemischten Metalle (der Legirung), worauf die Rechnung beruht, ist indeß nicht richtig.

§. 22.

IV.) Man soll eine zweizifferige Zahl des dekadischen Systems suchen, die der vierfachen Summe ihrer Ziffern gleicht, und wenn man zu dieser zweizifferigen Zahl 18 addirt, so soll sie einer Zahl gleich seyn, welche herauskömmt, wenn man die Ziffern in der gesuchten Zahl die Stellen wechseln läßt.

x seyen die Zehner,
y die Einheiten;

also ist $10\,x + y$ die gesuchte Zahl.

1) $10\,x + y = 4\,(x + y$

Wechseln in der gesuchten Zahl die zwei Ziffern ihre Stelle, so wird sie $10\,y + x$, daher

2) $10\,x + y + 18 = 10\,y + x$, woraus

$x = 2$

$y = 4.$

§. 23.

V. Man soll zwei Zahlen finden (x und y); wenn man die eine sowohl, als die andere mit 18 multiplizirt, so soll das erste Produkt ein Quadrat, und das zweite die Wurzel dieses Quadrats seyn; wenn man aber jede Zahl mit 3 multiplizirt, so soll das erste Produkt ein Cubus, und das zweite die Wurzel dieses Cubus seyn.

$18\,x = 18 \cdot 18\,y^2$ oder $x = 18\,y^2$

$3\,x = 3.\ 3.\ 3\,y^3$ oder $x = 9\,y^3$,

folglich $9\,y^3 = 18\,y^2$

$9\,y = 18$

$y = 2$,

und $x = 72.$

§. 24.

VI. Vom Orte M, der a Meilen vorwärts vom Orte N liegt, geht der Bote A, welcher m Meilen in n Stunden macht, h Stunden früher aus, als B, der nachgeschickt wird, vom Orte N; B macht p Meilen in q Stunden, um den Boten in x Stunden einzuholen.

Die Zeit für B sey x, für A aber y Stunden; der Weg für A folgt aus $n : m = y : \frac{my}{n}$, und der Weg für B folgt aus $q : p = x : \frac{px}{q}$. Da A aber a Meilen voraus hat, so ist sein Weg $= \frac{my}{n} + a$; derselbe Weg muß von B in x Stunden zurückgelegt werden, also

1) $\frac{px}{q} = \frac{my}{n} + a$, und da auch

$h + x = y$ oder

2) $\frac{mh + mx}{n} = \frac{my}{n}$ so folgt aus 1) und 2)

$\frac{(np - mq)x}{nq} = a + \frac{mh}{n,}$ woraus

Zeit für A) $x = \frac{(an + hm)q}{np - mq}$. und

Zeit für B) $y = h + x = \frac{(ph + aq)n}{np - mq.}$

Der ganze Weg für A

ist $\frac{my}{n} + a = \frac{(mh + an)p}{np - mq}$

und Weg für B wird

$\frac{px}{q} = \frac{(an + hm)p}{np - mq.}$

Anmerk. Gibt die Auflösung eine Unbekannte negativ, so muß man sie im entgegengesetzten Sinne nehmen; oder wenn man die Größen in der Aufgabe im entgegengesetzten Sinne nehmen will, so muß man sie negativ setzen.

C) Aufgaben mit drei Unbekannten.

§. 25.

I. Ein Fuhrmann übernimmt den Transport von mehreren Kisten mit Glaswaaren, unter der Bedingung, daß er eben so viel für jede Kiste ersetzen muß, an der etwas beschädigt wird, als er für den Transport einer unbeschädigten Kiste erhält. Die Kisten sind von dreierlei Größe; den ersten Tag transportirt er 7 kleinere, 4 mittlere und 9 große, beschädigt alle mittleren, und erhält 38 Gulden; den zweiten Tag transportirt er 7 kleine, 3 mittlere und 5 große, beschädigt alle großen und bekömmt 3 Gulden; den dritten Tag transportirt er 9 kleine, 10 mittlere und 11 große, beschädigt alle großen und bekömmt 4 Gulden. Wie viel kostet der Transport jeder einzelnen Kiste?

$$9x - 4y + 7z = 38$$
$$7z + 3y - 5x = 3$$
$$9z + 10y - 11x = 4$$

$x = 4$

$y = 3$

$z = 2$, d. h. der Transport einer großen Kiste kostete 4, einer mittleren 3, und einer kleinen 2 Gulden.

§. 26.

II. Ein Sterbender hinterläßt seiner Frau und seinen 3 Söhnen ein Vermögen von 11080 Gulden, welches sich aber in den Händen der Söhne, und zwar zu ungleichen Theilen befindet. Nach dem Testament soll der erste Sohn, der den größten Theil besitzt, ¼ davon der Mutter, und dem zweiten und dritten Sohn so viel Gulden geben, als sie schon haben. Hierauf soll der zweite Sohn, der nunmehr den größten Theil hat, ¼ davon der Mutter, und den beiden andern Söhnen so viel geben, als sie dermalen haben. Da jetzt der dritte Sohn den größten Theil hat,

so soll auch er $\frac{1}{4}$ davon der Mutter, und den beiden andern Söhnen so viel Gulden geben, als sie schon haben. Nach dieser letzten Theilung haben alle Söhne gleichviel. Wie viele Gulden hatte jeder Sohn bei dem Tode des Vaters, wie viel erbte jeder, und wie viel die Mutter?

Bei dem Tode des Vaters hatte der erste Sohn 6640, der zweite 3000, der dritte 1440 Gulden; jeder Sohn erbte 2160 und die Mutter 4600 Gulden.

D) Aufgaben mit 4 Unbekannten.

§. 27.

I. Das Vermögen von 4 Personen A, B, C und D soll aus folgenden Angaben bestimmt werden: Das Vermögen von A, B und C, vermindert um $\frac{1}{3}$ des Vermögens von D beträgt 310; das Vermögen von A, B und D, vermindert um $\frac{1}{3}$ des Vermögens von C beträgt 350; das Vermögen von A, C und D vermindert um $\frac{1}{3}$ des Vermögens von B beträgt 390; das Vermögen von B, C und D vermindert um die Hälfte des Vermögens von A beträgt 400 Gulden. Wie viel hat jeder Einzelner?

$$x + y + z - \tfrac{1}{3} u = 310.$$
$$x + y + u - \tfrac{1}{3} z = 350.$$
$$x + z + u - \tfrac{1}{3} y = 390.$$
$$y + z + u - \tfrac{1}{4} x = 400.$$

A hat 100, B 120, C 150, und D 180 Gulden.

§. 28.

II. Ein Haufe Soldaten besteht aus 4380 Köpfen, darunter sind Artilleristen (v), Infanteristen (z), leichte (y) und schwere (x) Reiter. Nimmt man die sämmtlichen Artilleristen, und die Hälfte der Soldaten von jeder andern Waffengattung, oder die sämmtlichen schweren Reiter, und den dritten Theil von jeder der übrigen Waffengattungen, oder die sämmtlichen leichten Reiter und den vierten Theil von jeder der übrigen Waffengattungen, oder die

sämmtlichen Infanteristen und den fünften Theil von jeder der übrigen Waffengattungen zusammen, so hat man jedesmal gleich viel Köpfe. Wie viel Köpfe zählte jede Waffen-Gattung?

$$v + \frac{x + y + z}{2} = x + \frac{x + y + z}{3}$$

$$x + \frac{v + y + z}{3} = y + \frac{v + x + z}{4}$$

$$y + \frac{v + x + z}{4} = z + \frac{v + x + y}{5}.$$

$$x + y + z + v = S \text{ oder } 4380.$$

Man findet $v = 60$
$x = 1140$
$y = 1500$
$z = 1680;$

und der jedesmal zusammengestellte Haufe bestand aus 2220 Köpfen.

E) Aufgaben über die Gleichungen des zweiten Grads mit einer Unbekannten.

§. 29.

I. Man soll eine Zahl finden, die mit 5 multiplizirt ein Produkt gibt, welches um 12 größer ist, als die Hälfte des Quadrats jener Zahl.

$$\frac{x^2}{2} + 12 = 5x$$

$$x = 6$$

$$x = 4.$$

Die gesuchte Zahl ist demnach 6 oder 4, und die Aufgabe hat also zwei Auflösungen, welche ihr beide in demselben Sinne entsprechen.

§. 30.

II. Unter eine gewisse Anzahl Personen sollen 175 Gulden vertheilt werden. Am Tage der Vertheilung wer-

den jedoch zwei Personen von dieser ausgeschlossen, wodurch jede der übrigen um 10 Gulden mehr bekömmt, als sie sonst bekommen hätte. Unter wie viel Personen (x) sollte anfänglich das Geld vertheilt werden?

Anfangs hätte jede $\frac{175}{x}$ bekommen; später aber bekömmt jede $\frac{175}{x-2}$; dieser Antheil ist aber um 10 Gulden größer, als er bei der Anwesenheit aller Personen gewesen wäre; wir haben also

$$\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}, \text{ und daraus}$$

$$x = 7$$

$$x = -5.$$

Die Wurzel + 7 entspricht den Worten der Aufgabe; die zweite dagegen entspricht einer andern Aufgabe, bei der vorausgesetzt wird, daß zu den schon vorhandenen Personen noch zwei hinzukommen, wodurch der Antheil jeder Person um 10 Gulden kleiner wird. Die Berechnung dieser letztern Aufgabe gibt

$$x = +5$$

$$x = -7.$$

Jene Wurzel also, welche den Worten der Aufgabe entspricht, ist positiv; jene hingegen, welche wohl die Bedingungen des Calculs erfüllt, aber die Aufgabe nicht in dem Sinne löst, in welchem sie gegeben ist, ist negativ.

§. 31.

III. Man soll eine Zahl finden, die so beschaffen ist, daß, wenn man zu ihrem Quadrate die mit 5 multiplizirte Zahl, und überdieß noch 6 hinzuaddirt, die Zahl 2 als Summe erscheint.

$$x^2 + 5x + 6 = 2.$$

$$x = -4$$

$$x = -1$$

Da hier beide Wurzeln der Gleichung negativ sind, so schließen wir daraus, daß die Aufgabe, um ein positives Resultat zu geben, in entgegengesetztem Sinne genommen werden müsse, und in der That, wenn wir eine Zahl suchen, deren Quadrat um die fünffache gesuchte Zahl vermindert, und sodann um 6 vermehrt, das Resultat 2 gibt, so erhalten wir die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 2, \text{ woraus}$$
$$x = 1 \text{ und}$$
$$x = 4 \text{ folgt, also}$$

dieselben Wurzeln, wie früher, nur mit entgegengesetztem Zeichen.

§. 32.

IV. Einige Kaufleute beginnen ein gemeinschaftliches Unternehmen, und jeder legt zehnmal so viel Gulden ein, als Theilnehmer sind. Der Geschäftsführer, dem sie das Ganze anvertrauen, bekömmt als Besoldung für jede hundert Gulden Einlage zweimal so viel Gulden, als Theilnehmer sind, und wenn man den hundertsten Theil seiner Besoldung mit $2\frac{2}{9}$ multiplizirt, so findet man die Anzahl (x) der Theilnehmer.

Jeder Theilnehmer hat $10x$, folglich Alle zusammen $10x^2$ Gulden eingelegt. Für jedes Hundert bekömmt der Geschäftsführer $2x$ Gulden, im Ganzen also so oft $2x$ Gulden, als 100 in $10x^2$ enthalten ist, d. h. er bekömmt $\frac{10x^2}{100} \times 2x$ oder $\frac{2x^3}{10}$ Gulden. Der hundertste Theil dieser Besoldung, d. h. $\frac{2x^3}{1000}$ multiplizirt mit $\frac{20}{9}$ gibt $\frac{4x^3}{900}$, und dieses Produkt ist gleich der Anzahl der Theilnehmer; also

$$\frac{4x^3}{900} = x, \text{ und dann}$$
$$x = \pm 15$$

§. 33.

V. Es verkauft Jemand sein Haus um 21836 Gulden, und gewinnt bei jeden hundert Gulden den hundertsten Theil von dem, was ihm das Haus gekostet hatte. Wie theuer (x) hatte er es gekauft?

Mit 100 Gulden gewinnt er $\frac{x}{100}$, also mit 1 Gulden $\frac{x}{10000}$, und mit x Gulden $\frac{x^2}{10000}$; der Einkaufspreis nebst dem Gewinne muß gleich dem Verkaufspreis seyn; also

$$\frac{x^2}{10000} + x = 21836;$$

der positive Werth von x ist 10600.

§. 34.

VI. Es kauft Jemand Pferde um 1008 Gulden. Hätte er für eben das Geld zwei Pferde mehr bekommen, so wäre jedes Pferd um 12 Gulden wohlfeiler gewesen. Wie viele Pferde (x) hat er gekauft? —

Jedes Stück kostet $\frac{1008}{x}$ Gulden; wären aber x + 2 Pferde gewesen, so hätte jedes $\frac{1008}{x+2}$ gekostet;

$$\text{daher } \frac{1008}{x} = \frac{1008}{x+2} + 12,$$

woraus der positive Werth von x = 12 wird.

§. 35.

VII. Zwei Pferdehändler verkaufen zusammen 95 Pferde, und lösen gleichviel Geld, obwohl sie nicht gleichviel Stücke verkauften. Hätte der zweite seine Pferde so theuer verkauft, wie der erste, so hätte er $7714\frac{2}{7}$ Gulden gelöst, und hätte der erste seine Pferde um denselben Preis verkauft, wie der zweite, so hätte er nur 2625 Gulden gelöst. Wie viele Pferde hatte jeder? —

Der erste x, und daher der zweite 95 — x. Hätte der zweite, wie der erste verkauft, so hätte er $\frac{54000}{7}$ Gulden

gelöst, also für eines seiner Pferde $\frac{54000}{7\,(95-x)}$ bekommen. Der erste hat seine Pferde wirklich um diesen Preis verkauft, er hat also für x Pferde $\frac{54000}{665-7x}$ Gulden erhalten. Hätte er aber so verkauft, wie der erste, so hätte er 2625, also für jedes Pferd $\frac{2625}{x}$ Gulden erhalten, und da dieß der Preis ist, um den der zweite seine Pferde verkaufte, so löste dieser im Ganzen

$$(95-x)\,\frac{2625}{x} \text{ d. i. } \frac{249375-2625\,x}{x}$$

Beide lösten gleichviel, also ist

$$\frac{54000}{665-7x} = \frac{249375-2625\,x}{x}.$$

Der positive Werth von x aus dieser Gleichung ist 35; demnach hatte der zweite 60, und der erste 35 Pferde.

§. 36.

VIII. Jemand leiht an eine Person 14000 Gulden gegen zwei Schuldscheine, jedoch zu gleichviel Prozenten. Vier Jahre nach der Ausstellung wird der erste Schuldschein gegen Bezahlung von 11880 Gulden an Kapital sammt Interessen, ein Jahr später der zweite gegen Bezahlung von 7000 Gulden an Kapital und Interessen eingelöst. Auf wie viel Gulden war jeder Schuldschein ausgestellt.

Da beide Posten gegen gleiche Interessen ausgeliehen sind, so kömmt es nur darauf an, zu finden, wie hoch sich der jährliche Gewinn für einen Gulden beläuft, weil sich hieraus die ganze Anzahl Gulden ableiten läßt. Wenn der erste Schuldschein auf x Gulden ausgestellt war, so betragen die vierjährigen Interessen 11880 — x, also die einjährigen $\frac{11880-x}{4}$; und da sonach x Gulden in einem

Jahre $\frac{11880 - x}{4}$ Gulden abwerfen, so wird der jährliche Gewinn für einen Gulden $\left(\frac{11880 - x}{4}\right) : x = \frac{11880 - x}{4x}$.

Da der erste Schuldschein auf x Gulden ausgestellt war, so lautet der zweite auf $14000 - x$; die fünfjährigen Interessen desselben betragen also $7000 - 14000 + x$, folglich die einjährigen $\frac{x - 7000}{5}$; der jährliche Gewinn für einen Gulden ist demnach

$$\left(\frac{x - 7000}{5}\right) : (14000 - x) \text{ oder } \frac{x - 7000}{70000 - 5x},$$ und

da die Interessen gleich sind, so haben wir

$$\frac{11880 - x}{4x} = \frac{x - 7000}{70000 - 5x}.$$

Der positive Werth von x ist 9000; also war der erste Schuldschein auf 9000 Gulden, der zweite auf 5000 Gulden ausgestellt.

§. 37.

IX. Zwei Personen A nnd B legen ihre Capitale an. Das des A ist um 2000 Gulden größer, als das des B. Sie beziehen zusammen in einem Jahre 860 Gulden Interessen. Hätte A sein Geld zu so viel Procent angelegt, wie B, so würde er 400 Gulden Interessen beziehen; eben so würde B, wenn er sein Capital zu so viel Procent angelegt hätte, wie A, 420 Gulden Interessen beziehen. Wie groß war das angelegte Capital jedes Einzelnen?

Das des B heiße x, also das des A, $x + 2000$. Hätte B sein Capital so wie A angelegt, so hätte er 420 Interessen bezogen, also für einen Gulden $\frac{420}{x}$ Dieß hat A wirklich mit einem Gulden gewonnen, also betragen die Interessen seines ganzen Capitals $\frac{420(x + 2000)}{x}$. A hätte, wäre sein Capital so angelegt gewesen, wie das des B,

400 Interessen, also für jeden Gulden $\frac{400}{x+2000}$ bezogen. Die Interessen des B betragen also $\frac{400\,x}{x+2000}$, und da beide zusammen 860 Gulden beziehen, so ist

$$\frac{420\,(x+2000)}{x} + \frac{400\,x}{x+2000} = 860,$$ woraus

$x = 5000$ folgt. Das Kapital des A betrug also 7000, das des B 5000 Gulden.

409 Interessen, also für jedes Quartal $\frac{409}{4}$ Gulden. Die

Interessen des B betragen also $\frac{3x}{100}$, und da beide

zusammen 409 Gulden ergeben, so ist

$$\frac{5.0(x+2000)}{4} + \frac{3x}{100} = 409 \text{ Gulden}$$

x = 8000 folgt. Das Kapital des A beträgt also 2000, und von B 6000 Gulden.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 31 Zeile 5 lese man: — α anstatt — (α

— 32 — 4 — : — $(\pm a$ anstatt — $(- a$

— 42 — 15 — : A : A = 1 anstatt A : A = A.

— 44 — 9 — : den Dividend vermehrt, oder

— 54 — 25 — : Lehrs. anstatt Erster Satz.

— 64 — 3 — : $A : \frac{B}{C}$.

— 78 — 4 — : $m-6$.

— — — 5 — : $m-9$.

— 102 — 21 — : $x + \frac{m}{a}$

— 104 — 16 — : $b^2 x$ anstatt $b^2 \sqrt{x}$

— 112 — 17 — : $x = x$ anstatt $4 = x$.

— 118 — 12 — : in die fünfte Gleichung E.

— 134 — 2 — : $a + b = - P$.

— 135 — 15 — : dieß gäbe

— 137 — 12 — : $x = + \frac{3}{10}$ (zweimal)

— 137 — 15 — : $- \frac{3}{5} x$

— 138 — 3 — : $- 1$.

— 140 — 17 — : $\pm \sqrt{27}$.

— 140 — 26 — : Px^n

— 143 — 29 — : Ax^2

— 143 letzte Zeile — : $= (x - a)(x - b)$.

— 145 Zeile 15 : y^2 anstatt y.

— 146 — 18 — : deren Summe, Produkt u. Differenz

— 148 — 13 — : $x^2 - dx =$

— 148 — 18 — : $\frac{2 + \sqrt{}}{2}$

— 149 — 4 — : $d + \sqrt{}$

— 154 — 4 — : $5x^7$

Auf den Seiten 158, 159, 160, 179, 180, 181 lese man q anstatt 9.

— 159 Zeile 25 lese man = anstatt —

— 162 — 22 lese man

$$\frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m = q^m.$$

Seite 166 Zeile 14 und 15 lese man c : d und a : b.

— 166 letzte Zeile lese man $\frac{bc}{c}$.

— 173 Zeile 17. ist einzuschalten: ...nten Ordnung, je nachdem die ersten, zweiten, dritten....

— 175 Zeile 9 lese man + 1 anstatt + d.

— — — 19 — (n — 1 — m) d.

— 176 — 4 — enthält

— 181 — 20 — 1 > q anstatt 179.

— 183 Die Formel Nro. XVI. muß also heißen:

$$\left\{1 + \log\left(\frac{z}{S - q\,(S - z)}\right)\right\} : \log q.$$

— 190 Zeile 5 ist wegzustreichen: die jedoch

— 190 — 8 lese man oder anstatt der

— 192 — 26 u. 27. d. h. $x > y$ und $b^x > b^y$ wegzustreichen.

— 195 — 27 lese man $\log (A^m)$.

— 199 — 9 — Log N.

— 209 — 11 — für jeden Gulden, anstatt für jedes Hundert.

— 223 streiche man weg: „das Handelsgewicht verhält sich zum Apothekergewicht, wie 14:9."

— 224 letzte Zeile, lese man welches, anstatt welche 6;

— 242 Zeile 15 lese man n Tage, anstatt 12 Tage.

— 251 — 15 — $\frac{\alpha}{a}$ anstatt $\frac{a}{a}$.

— 254 — 6 — den Boten A.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Lyzeen

Bd.: 1

1829

Bamberg, Staatsbibliothek -- RB.Ma.o.2#1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11770725-5